

Gjennomgang av deler av kapittel 6, 7, 8 og 10 i Marshall & Plumb (2008)

Av Helge Drange
Geofysisk institutt, Universitetet i Bergen

GEOF110, vår 2025

Vennligst gi et ord om feil, mangler, ønsker etc. til helge.drange@uib.no

Tenk på miljøet – unngå unødvendige utskrifter!

12. januar 2025

Innhold

1	De grunnleggende ligningene; bakgrunn, utledning og tolkning	7
1.1	Bakgrunn	7
1.1.1	Bevaring av masse og bevegelsesmengde	10
1.1.2	Tilleggsligninger for atmosfæren	10
1.1.3	Tilleggsligninger for havet	10
1.2	Den totalderiverte av en vilkårlig skalar C (§6.1)	11
1.2.1	Utledning	11
1.3	Den totalderiverte av hastighetsvektoren \mathbf{u} i et ikke-roterende koordinatsystem	14
1.3.1	Kommentar 1	15
1.3.2	Kommentar 2	15
1.4	Momentumligningen i et ikke-roterende koordinatsystem	15
1.4.1	Væskeelementets masse	15
1.4.2	Newtons andre lov	16
1.4.3	Krefter som virker	16
1.4.4	(a) Gravitasjonskraft	16
1.4.5	(b) Trykkgradientkraft	16
1.4.6	(c) Friksjonskraft	18
1.4.7	Oppsummert	19
1.4.8	Momentumligningen å komponentform	20
1.4.9	Hydrostatisk tilnærming	20
1.5	Momentumligningen i et roterende koordinatsystem (§6.2)	20
1.5.1	Skalare- og vektorstørrelser i et roterende koordinatsystem	20
1.5.2	Kommentar	21
1.5.3	Jordens rotasjonsvektor	21
1.5.4	Tidsderivert av posisjonsvektor i et roterende koordinatsystem	21
1.5.5	Totalderivert av en generell vektor \mathbf{A} i et roterende koordinatsystem	23
1.5.6	Utledning av fiktive akselerasjoner i et roterende koordinatsystem	25
1.5.7	Momentumligningen i et roterende koordinatsystem	26
1.5.8	Bevegelsesligningen i et roterende system, ledd for ledd	26
1.5.9	Coriolisakselerasjonens virkning på en roterende disk	27
1.5.10	Coriolisakselerasjonen på en kule	27
1.5.11	Coriolisleddet på komponentform	29
1.5.12	Coriolisakselerasjonen på forenklet form	30
1.5.13	Huskeregul, $\hat{\mathbf{z}} \times \boldsymbol{\psi}$	30
1.5.14	Coriolisleddet utfører ikke arbeid	31
1.5.15	Egenskaper til Coriolisakselerasjonen $-2\boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{u}$	31
1.5.16	Sentrifugalakselerasjonens orientering	32
1.5.17	Sentrifugalakselerasjonens absoluttverdi	32
1.5.18	Sentrifugalakselerasjonen på komponentform	33
1.5.19	Egenskaper til sentrifugalakselerasjonen $-\boldsymbol{\Omega} \times (\boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{r})$	33
1.5.20	Sentrifugalleddets virkning i momentumligningen	34
1.5.21	Følt (eller faktisk) gravitasjon på jorden, og momentumligningen på standard form	34
1.6	Kontinuitetsligningen (§6.3)	35
1.6.1	Utledning	35
1.6.2	Konvergens og divergens	36
1.6.3	Kontinuitetsligningen uttrykt med den totalderiverte av ρ	37

1.6.4	Kontinuitetsligningen for inkompressible væsker	37
2	Balansert strøm (§7)	38
2.1	Skalaanalyse for fri, storskala bevegelse i atmosfære og hav (§7.1)	38
2.1.1	Rossbytalet	40
2.1.2	Geostrofisk (kraft)balanse	41
2.1.3	Geostrofisk strøm \mathbf{u}_g (§7.1)	41
2.1.4	Geostrofisk strøm på komponentform	43
2.1.5	Geostrofisk kraftbalanse for lav- og høytrykk	43
2.1.6	Eksempel, geostrofisk balanse	44
2.1.7	Variierende strømstyrke (§7.1)	44
2.2	Kontinuitetsligningen for geostrofisk strøm	45
2.2.1	Kontinuitetsligningen for en inkompressibel væske, geostrofisk strøm	46
2.2.2	Inkompressibel væske, geostrofisk strøm, vertikal komponent	46
2.3	Introduksjon av trykk-koordinater og geostrofisk strøm på geopotensialflater (§7.1.1)	47
2.3.1	Alternativ utledning av geostrofisk strøm i trykkoordinater	49
2.3.2	Kontinuitetsligningen for en kompressibel væske, geostrofisk strøm	50
2.4	Valg av geostrofisk uttrykk	50
2.5	Tolkning av geostrofisk balanse i trykk-koordinater	51
2.5.1	$(\partial z/\partial x)_p = \text{konst} < 0$, $(\partial z/\partial y)_p = 0$ og $f > 0$	51
2.5.2	$(\partial z/\partial x)_p = 0$, $(\partial z/\partial y)_p = \text{konst} < 0$ og $f > 0$	51
2.5.3	Eksempel, en synoptisk værstsituasjon, 23. februar 2009	51
2.6	Taylor-Proudman teoremet på en roterende disk, inkompressibel væske (§7.2)	51
2.6.1	Taylor-Proudman teoremet på en roterende disk, kompressibel væske	52
2.6.2	Taylor-Proudman teoremet – et paradoks	52
2.7	Termalvind uttrykt med nivåkoordinat	53
2.8	Termalvind uttrykt med trykk-koordinat	54
2.8.1	Jordens sonale jetstrømmer	55
2.9	Termalvinduttrykket integrert mellom to isobarer (§7.3.5)	55
2.10	Tolkning av termalvind	56
2.10.1	Sammenheng mellom geostrofisk vind og termalvind	56
2.10.2	Orientering	56
2.10.3	$\nabla_p \bar{T} = \mathbf{0}$	56
2.10.4	$\nabla_p \bar{T} = \text{konst} \neq \mathbf{0}$	56
2.10.5	$(\partial \bar{T}/\partial y)_p = \text{konst} < 0$, $(\partial \bar{T}/\partial x)_p = 0$ og $f > 0$	56
2.10.6	$(\partial \bar{T}/\partial y)_p = \text{konst} > 0$, $(\partial \bar{T}/\partial x)_p = 0$ og $f < 0$	57
2.10.7	$(\partial \bar{T}/\partial x)_p = \text{konst} > 0$, $(\partial \bar{T}/\partial y)_p = 0$ og $f > 0$	57
2.10.8	Kald og varm adveksjon	57
2.10.9	Eksempel termalvind, idealisert eksempel	59
2.10.10	Vertikalt hastighetsskjær i et lavtrykk med kald kjerne	59
2.10.11	Vertikalt hastighetsskjær i et lavtrykk med varm kjerne	59
2.11	Sammenheng mellom geostrofisk vind og termalvind i atmosfæren	61
2.12	Margules sammenheng (§7.3.3) ¹	63
2.12.1	Oppdriftsfrekvens/Brunt-Väisälä frekvensen N	64
2.12.2	Redusert gravitasjon g'	66
2.12.3	Spinnsatsen $\mathbf{L} = \text{konst.}$ og atmosfærens spinn i sonal retning	66
2.12.4	Utledning Margules sammenheng	68

¹Se også Steinacker & Brönnimann, *Stationary flow near fronts*, Met. Zeitschrift, **25**, 805–809, 2016, og seksjon 5.2 i *LECTURES ON DYNAMICAL METEOROLOGY* av Roger K. Smith, Version: December 11, 2007.

2.12.5	Rossbys tilpasningsproblem (§7.3.4)	69
2.12.6	Rossby deformasjonsradius	71
2.13	Opprinnelig form av Margules sammenheng	72
2.14	Avvik fra geostrofi grunnet friksjon (§7.4)	73
2.14.1	Orientering til \mathbf{u} når det virker friksjon	74
2.14.2	Uttrykk for friksjon	75
2.14.3	Virkning av friksjon	76
2.14.4	Estimert avvik fra geostrofi	76
2.15	Kystkonvergens	77
2.16	Kontinuitetsligningen i trykk-kordinater (§6.3.2)	77
2.16.1	Utledning	77
2.17	Vertikal bevegelse grunnet friksjon i et lav- eller høytrykk	80
3	Atmosfærens generelle sirkulasjon (§8)	82
3.1	Motivasjon (§8.1)	82
3.2	Hadley-cellenes meridionale utstrekning, $ \varphi \lesssim 30^\circ$ (§8.2)	83
3.2.1	Hadley-cellenes utstrekning basert på ulike fysiske prinsipper	85
3.2.2	Eksempel, sammenheng mellom spinnsatsen og sonal komponent av momentum-ligningen	86
3.3	Atmosfæresirkulasjonen utenfor Hadley-cellene, $ \varphi \gtrsim 30^\circ$ (§8.2)	86
3.3.1	<i>In situ</i> temperatur T og potensiell temperatur θ (§4.3.2)	87
3.3.2	Fra <i>in situ</i> til potensiell temperatur (§5.1.4)	87
3.3.3	Kommentar: Potensiell og kinetisk energi i en tolagsmodell	89
3.3.4	Potensiell energi til en væske (§8.3.1)	89
3.3.5	Beregning av potensiell energi for en tolags væskemodell (§8.3.2 og §A.1.2)	90
3.3.6	Omtrentlig verdi til γ i grader	91
3.3.7	Kinetisk energi til en væske (§8.3.2)	91
3.3.8	Kinetisk energi i en tolags væskemodell (§8.3.2)	92
3.3.9	Forholdet mellom potensiell og kinetisk energi i en tolags væskemodell (§8.3.2)	92
3.3.10	Verdi til forholdet mellom potensiell og kinetisk energi for atmosfære og hav (§8.3.2)	93
3.3.11	Oppsummering, drivmekanisme for synoptiske systemer (§8.3.2)	93
3.3.12	Drivmekanisme for synoptiske systemer, utledning ² (§8.3.3 og oppgave 5, s. 160 i M&P)	93
3.3.13	Oppsummert (§8.3)	97
3.3.14	Meridional transport av sonalt momentum utenfor Hadley-cellene (§8.4.2)	97
3.3.15	Oppsummert (§8.4.2)	100
4	Temperatur- og salt-drevet havsirkulasjon (§9)	101
4.1	Noen karakteristiske størrelser for havet	101
4.2	Rossby-tall og geostrofisk tilnærming	102
4.3	Geostrofisk strøm på ulike dyp z	104
4.3.1	Trykk p på et generelt dyp z	104
4.3.2	Horisontal gradient av p	105
4.3.3	Geostrofisk strøm på generelt dyp z	105
4.3.4	Geostrofisk strøm nær overflaten	106

²Se også seksjon 9.1–9.3 i *LECTURES ON DYNAMICAL METEOROLOGY* av Roger K. Smith, Version: December 11, 2007.

4.3.5	Karakteristisk verdi for romlig ending av η	106
4.3.6	Geostrofisk strøm i dyphavet	107
4.3.7	Typisk verdi av svingefrekvensen N	109
4.3.8	Isopyknal helning	110
4.4	Sterisk høyde (§9.3.3)	111
4.4.1	Eksempel, havnivåendring på tvers av Golfstrømmen	113
5	Vinddrevet havsirkulasjon (§10)	114
5.1	Motivasjon	114
5.2	Vindstress og Ekman-lag	114
5.2.1	Definisjon av τ	114
5.2.2	Sammenheng mellom kraft, vindstress og \mathcal{F} i momentumligningen	114
5.2.3	Utledning av vindstressbidrag i momentumligningen	115
5.3	Vinddrevet storskala, fri havsirkulasjon	116
5.4	Ekman-dynamikk ³	118
5.4.1	Horisontal massetransport i Ekman-laget	118
5.4.2	Ekman-transport M_{Ek} uttrykt med τ_{vind}	119
5.4.3	Konvergens/divergens av Ekman-transport i Ekman-laget	119
5.4.4	Transport gjennom nedre grenseflate på Ekman-laget	121
5.4.5	Forenkling	121
5.4.6	Typisk verdi til w_{Ek}	122
5.4.7	Tolkning	122
5.4.8	Oppsummering	123
5.4.9	Respons av Ekman-pumping under Ekman-laget (§10.2.1)	124
5.4.10	Meridional hastighet ved Ekman-pumping forklart med Taylor-Proudman teoremet (§10.2.3) ⁴	126
5.4.11	Konseptuell oppsummering av Ekman-teorien for sonal vind	128
5.4.12	Vestlig randstrøm	128
5.5	Sverdrupbalanse ⁵ (§10.3)	131
5.5.1	Sverdrupbalanse, geometrisk tolkning (§10.2.3)	133
5.5.2	Løsningsmetode, Sverdrupbalanse	133
5.5.3	Hastighetskomponentene U, V fra ψ	134
5.5.4	Vertikalintegert, meridional strøm (Sverdrupsirkulasjon) for sonal vind	134
5.5.5	Utregning av volumtransport basert på Sverdrupbalanse	135
5.5.6	Løsning for sonal vind, Stillehavet	136
5.5.7	Eksempel, sammenheng mellom Ekman- og Sverdrup-teori	137
A	Grunnleggende funksjon- og vektoranalyse	139
A.1	Koordinatsystem	139
A.1.1	Rektangulære koordinater	139
A.1.2	Kurvelineære polare koordinater	139
A.1.3	Buelengde	139
A.1.4	Polare koordinater	141

³Se også seksjon 8.6 i *Introduction to Geophysical Fluid Dynamics* av Benoit Cushman-Roisin og Jean-Marie Beckers (2010), og seksjon 5.3 i *LECTURES ON DYNAMICAL METEOROLOGY* av Roger K. Smith, Version: December 11, 2007.

⁴Se også diskusjon i seksjon 4.1-4.4 i *LECTURES ON DYNAMICAL METEOROLOGY* av Roger K. Smith, Version: December 11, 2007.

⁵Se også seksjon 6.3 i *LECTURES ON DYNAMICAL METEOROLOGY* av Roger K. Smith, Version: December 11, 2007.

A.1.5	Polare kulekoordinater	141
A.2	Avstander på en kuleflate	141
A.3	Variabel	141
A.4	Funksjon	142
A.5	Skalarfunksjon	142
A.6	Vektorfunksjon	142
A.7	Skalarprodukt	143
A.8	Kryssprodukt	143
A.9	Derivasjon i et fikssystem	144
A.9.1	Gradient til en skalarfunksjon	144
A.9.2	Divergensoperatoren; divergerende og konvergerende vektorfunksjon	144
A.9.3	Dobbeltderivert	144
A.9.4	Kurl	144
A.9.5	Relativ, absolutt og potensiell virvling	145
A.10	Vektoridentiteter som involverer ∇ -operatoren	145
A.11	Derivasjon i et polarkoordinatsystem	145
A.11.1	Polare koordinater	145
A.11.2	Polare kulekoordinater	147
A.11.3	Totalderivert uttrykt i kulekoordinater	149
A.12	Adveksjonsleddet for ren sirkulær bevegelse i to dimensjoner	151
A.13	Sirkulær bevegelse og avstander på en kule	152
A.13.1	Fart til en sirkulær bevegelse	152
A.13.2	Avstander på en kule	152
A.14	Taylorrekke i én og flere dimensjoner	154
B	Sammenheng mellom temperatur og avstand mellom to isobarflater	154
B.1	Anvendelse av trykk- og høydegradient	156
C	Utledning, potensiell energi i en tolagsmodell	157
D	Utledning, meridional forflytting av ev Taylor-søyle på en kule grunnet Ekman-pumping	158
E	Geostrofisk strøm tolket med strømfunksjon ψ (§7.1)	160
F	Oppdateringer	161
G	Register	163

1 De grunnleggende ligningene; bakgrunn, utledning og tolkning

Se appendiks for definisjon av skalarprodukt, kryssprodukt, buelengde, polarkoordinater, kulekoordinater, rekkeutvikling, etc.

1.1 Bakgrunn

Selv om bevegelsen i atmosfære og hav kan synes tilfeldig, er det en viss grad av orden i kaoset:

Bevegelsen til et (i) ulikt oppvarmet, (ii) vertikalt lagdelt (iii) fluid på en (iv) roterende kule er ikke tilfeldig; den følger grunnleggende (v) fysiske prinsipper.

De nummererte ordene/betegnelse kan forklares slik:

- (1) **Ulikt oppvarmet.** Målinger viser at det er netto oppvarming i tropene og netto nedkjøling på høye breddegrader, se figur 5.5 i M&P.

Uten transport av varme fra tropene til polene vil dette føre til stadig økende temperatur i tropene og stadig fallende temperatur ved polene. Fra observert temperatur vet vi at dette ikke er tilfellet. Følgelig *må* det være varmetransport fra tropene mot høyere breddegrader på hver halvkule. Dette er tilfellet for både atmosfære og hav.

Se animasjonen

https://folk.uib.no/ngfhd/Animations/watra_ci_sd_e_tcw_tp_201409-11.mp4

for en illustrasjon av transport av fuktighet (hvit farge) og tilhørende store nedbørsmengder (blå farge), basert på en høyoppløslig, global værvarslingsmodell (animasjon laget av Mats Bentsen, NORCE/Bjerknessenteret). På tilsvarende måte som fuktighet vil også varme transporteres fra lave til høye breddegrader.

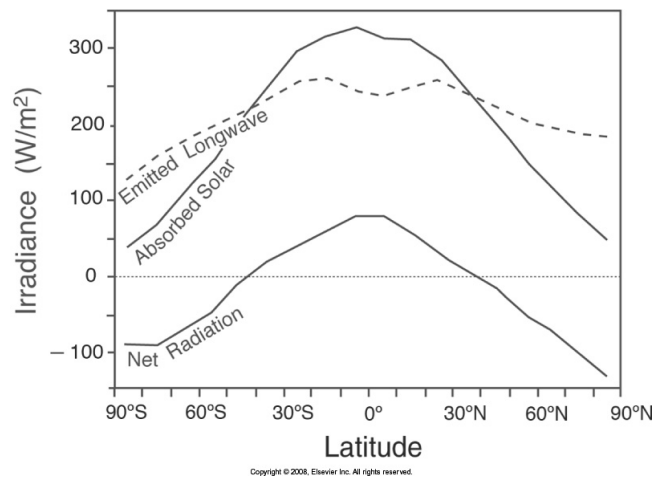
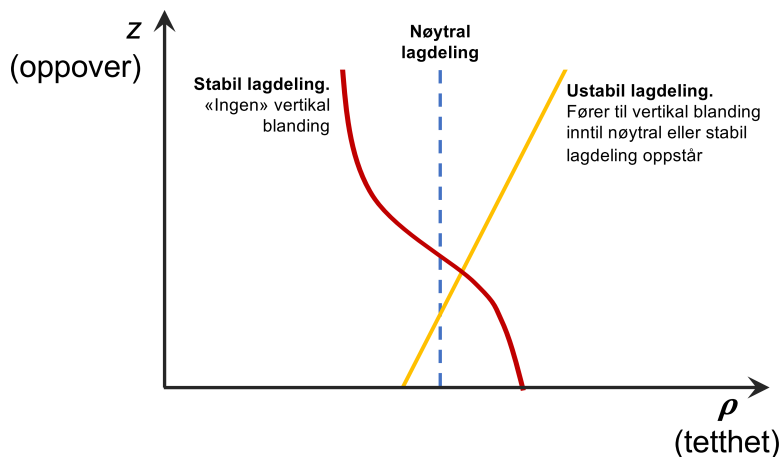


Figure 1: Annual mean absorbed solar radiation, emitted long-wave radiation, and net radiation, the sum of the two. Figure 5.5. i M&P.

(2) **Vertikalt lagdelt.** Tettheten ρ , som er masse per volum med enhet kg/m^3 , vil generelt avta oppover i atmosfæren og øke nedover havet. Dette gir opphavet til det som ofte benevnes *vertikal tetthetsstratifisering* eller bare *tetthetsstratifisering*.

En *stabil lagdeling* betyr at en lett væske ligger over en tyngre væske. Skulle en tung væske ligge over en lett væske – som kalles en *ustabil lagdeling* – vil det oppstå vertikal blanding inntil *nøytral* eller stabil lagdeling fremkommer, se figur 2.



Figur 2: Illustrasjon på stabil, nøytral og ustabil vertikal lagdeling. En stabil stratifisering motvirker vertikal blanding da det krever energi å løfte en tung væske og senke en lett væske i vertikalen. En ustabil stratifisering vil føre til vertikal blanding inntil nøytral eller stabil stratifisering oppstår.

(3) **Fluid.** Et *fluid* (substantiv, intetkjønn) er en fellesbetegnelse for gasser og væsker. Luft og vann er begge eksempler på (hydrodynamiske) fluider. I dette kompendiet brukes oftest begrepet *væsker* i stedet for fluider.

All materiale i naturen kan grupperes i én av to typer; som fast stoff eller som væske. I et fast stoff er molekylene bevegelse begrenset («molecular immobility»). I en væske er molekylene fri til å bevege seg («molecular mobility»)⁶.

For å beskrive bevegelsen til luft/vann, deler vi væskene opp i (tenkte) (vi) **materielle volumer**. Volumene kan ha hvilken som helst form, men det er vanlig og matematisk hensiktsmessig å betrakte volumene som kuber.

Summen av krefter som virker på et materielt volum bestemmer hvordan volumet, i vårt tilfelle luften og vannet, beveger seg. Newtons andre lov, heretter N2,

$$\mathbf{F} = m \mathbf{a} \tag{1}$$

gjelder for ethvert materielt volum på samme måte som N2 gjelder for en fallende kule i luft eller en glidende klosse på et skråplan. I uttrykket over er \mathbf{F} kraftvektor (enhet N), m (kg) er masse og \mathbf{a} (m/s^2) er akselerasjon.

⁶Reddy, J. N. (2013), *An Introduction to Continuum Mechanics*, second edition, s. 242, Cambridge University Press.

- (4) **Roterende kule.** Newtons andre lov, uttrykk (1), gjelder for et *ikke-akselererende* koordinatsystem, eller et koordinatsystem som enten ligger fast eller som beveger seg med konstant hastighet i forhold til *fiksstjernene* (punkter som antas å ligge fast på himmelen).

Jorden roterer og vi observerer vind og strøm på jorden, altså i et roterende koordinatsystem. For å kunne bruke N2 på jorden må vi da overføre N2 til et roterende koordinatsystem. Dette gir opphav til *Coriolis-* og *sentrigugalakselerasjonene*.

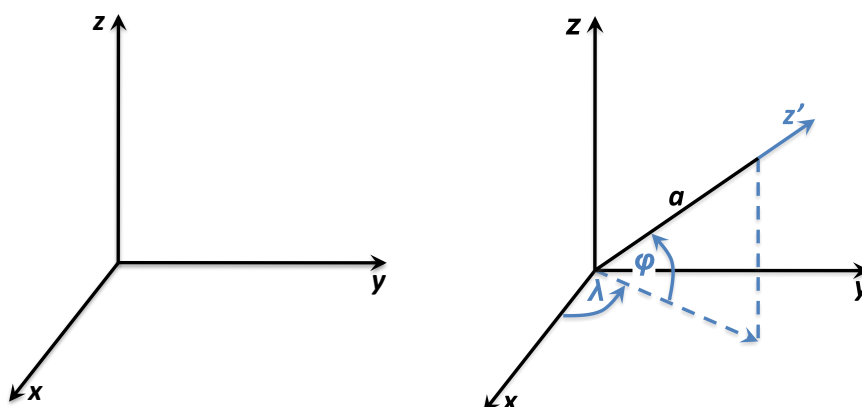
Ofte blir N2 uttrykt i et rettvinklet koordinatsystem x, y, z , hvor x, y er horisontale retninger og z er vertikal retning, se venstre del av figur 3. Men siden jorden er tilnærmet kuleformet, bruker vi oftest kulekoordinatene

$$\lambda, \phi, z' \quad (2)$$

som betegner lengdegrad, breddegrad og retning utover relativt til jordens overflate, se høyre del av figur 3.

Merk at for kulekoordinatsystemet i figur 3 varierer lengdegrad λ fra 0 til 360 grader (rundt jorden parallelt med ekvator, hvor $\lambda = 0$ ligger på null-meridianen gjennom Greenwich, også kjent som Greenwich-meridianen⁷) og breddegrad ϕ varierer fra -90 grader (sørpol) til $+90$ grader (nordpol).

Koordinatsystemene, uansett hvilken type, følger **høyrehåndsregelen**. Alltid!



Figur 3: Et rettvinklet koordinatsystem i tre dimensjoner (venstre), og det mest brukte kulekoordinatsystemet i meteorologi og oseanografi (høyre). Høyrehåndsregelen gir at koordinatene er beskrevet i følgende rekkefølge: x, y, z og λ, ϕ, z' . I figuren til høyre er $a = 6.37 \times 10^6$ m jordens midlere radius.

- (5) **Fysiske prinsipper.** De dynamiske og termodynamiske naturlovene som beskriver atmosfærens og havets bevegelser. Prinsippene baseres på *empiri* og grunnleggende hypoteser og inkluderer, blant annet, prinsippet om *massebevaring* (at masse ikke kan oppstå eller forsvinne), bevaring av varme (at varme ikke kan oppstå eller forsvinne), N2 og en *tilstandsligning* (som den idelle gasslov for atmosfæren og sjøvannets tilstandsligning).

De fysiske prinsippene uttrykkes med matematiske differensialligninger. Et krav for at ligningene skal kunne løses er at det er like mange ligninger som antall ukjente variable.

⁷<https://no.wikipedia.org/wiki/Nullmeridianen>

Sammen med *initialbetingelser* (verdi til variablene ved en viss tid, for eksempel for tid $t = 0$) og *randbetingelser* (verdi til de variable i rommet x, y, z), danner dette et løsbart ligningssystem.

De fysiske prinsippene – uttrykt som matematiske differensialligninger med initial- og randbetingelser – kalles de *primitive ligningene*.

Primitiv betyr *grunnleggende*, og ligningssystemet vi snakker om gjelder for enhver væske på en roterende planet, om planeten er jorden eller mars eller hva det skulle være. Det primitive ligningssystemet gjelder også for rom- og tidsbeskrivelse av bevegelse i et vann, en elv eller for en væske i et laboratorium. De primitive ligningene står derfor særdeles sentralt for all bevegelsesbeskrivelse i naturen.

Det primitive ligningssystemet kan bare i idealiserte – eller forenklete – tilfeller løses analytisk og eksakt. Full løsning krever omfattende, numeriske modeller.

De grunnleggende ligningene følger under; disse utledes i kap. 6 i M&P og videre i dette kapittelet. Forklaring til variabelnavn og symboler kommer når disse defineres.

1.1.1 Bevaring av masse og bevegelsesmengde

Bevaring av masse

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \mathbf{u}) = 0 \quad (3)$$

Bevaring av bevegelsesmengde (momentum) i tre dimensjoner (x, y, z)

$$\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + \mathbf{u} \cdot \nabla \mathbf{u} + \frac{1}{\rho} \nabla p + \hat{\mathbf{z}} g = -2 \boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{u} - \boldsymbol{\Omega} \times (\boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{r}) + \mathcal{F} \quad (4)$$

1.1.2 Tilleggsligninger for atmosfæren

Tilstandsliking for atmosfæren (ideelle gasslov som er en god beskrivelse for tørr luft)

$$p = \rho RT \quad (5)$$

Bevaring av varme (her temperatur)

$$\frac{\partial T}{\partial t} + \nabla \cdot (T \mathbf{u}) = Q \quad (6)$$

ligningene (3)-(6) er et løsbart system bestående av 6 ligninger med 6 ukjente ρ , $\mathbf{u} = (u, v, w)$, p og T .

1.1.3 Tilleggsligninger for havet

Tilstandsligning for havet (en av flere versjoner)

$$\rho = \rho_0 [1 - \alpha (T - T_0) + \beta (S - S_0)] \quad (7)$$

Bevaring av varme (her temperatur)

$$\frac{\partial T}{\partial t} + \nabla \cdot (T \mathbf{u}) = Q \quad (8)$$

Bevaring av salt

$$\frac{\partial S}{\partial t} + \nabla \cdot (S \mathbf{u}) = \text{kilder minus sluk} \quad (9)$$

likningene (3), (4) og (7)-(9) er et løsbart system bestående av 7 ligninger med 7 ukjente ρ , $\mathbf{u} = (u, v, w)$, p , S og T .

(6) Materielt volum. Et materielt volum er et volum bestående av de samme molekylene, eller den samme massen, som om volumet var begrenset av ikke-gjennomtrengelige, messeløse sider, som en masseløs membran. Volumets form kan endres, men ikke volumets innhold. Et materielt volum kalles også væskepartikler (eller fluidpartikler).

En illustrasjon på et hav sammensatt av en «uendelighet» av kuler er vist i animasjonen

https://folk.uib.no/ngfhd/Animations/BubbleOcean_CurrentSpeed_hires.mov

(animasjon laget av Ingo Bethke, UiB/Bjerknessenteret). For enkelhets skyld, og som tidligere nevnt, antar vi at væskeelementene har form som kuber.

1.2 Den totalderiverte av en vilkårlig skalar C (§6.1)

Vi betrakter atmosfæren og havet bestående av et uendelig antall materielle væskepartikler. Dersom det virker en kraft på en eller flere av væskepartiklene vil disse få en akselerasjon i kraftens retning gitt ved N2, $\mathbf{F} = m \mathbf{a}$ (ligning 1). Væskepartiklene vil generelt være i bevegelse, vi er derfor interessert i å finne/beregne kreftene \mathbf{F} som virker på enhver væskepartikkel *når vi følger med bevegelsen*.

Den totalderiverte uttrykker nettopp dette; en størrelses endring med bevegelsen.

hvor *endring* betyr *endring i tid*.

1.2.1 Utledning

La $C = C(x, y, z, t)$ være en skalar egenskap (temperatur, tetthet, trykk, fart, etc.) til f.eks. en luftpartikkel. Argumentet x, y, z, t viser at C kan variere i det tredimensjonale rommet x, y, z , samt i tid t . Dette vil generelt være tilfellet for geofysiske størrelser.

Vi søker nå et matematisk uttrykk for hvordan luftpakkens egenskap C (i) *endrer seg* (ii) *med bevegelsen*.

Matematisk uttrykk for (i) generell endring Endring av C , skrevet δC hvor δ angir en liten endring, kan skje på grunn av variasjoner eller endringer i de tre romlige retningene x, y, z , eller i tid t .

Taylorrekke-utvikling til første orden, se appendiks A.14, gir et matematisk uttrykk for dette

$$\delta C = \frac{\partial C}{\partial x} \delta x + \frac{\partial C}{\partial y} \delta y + \frac{\partial C}{\partial z} \delta z + \frac{\partial C}{\partial t} \delta t \quad (10)$$

Matematisk uttrykk for (ii) endring med bevegelsen Fra fysikken vet vi at

$$\text{fart} = \frac{\text{distanse}}{\text{tid}}, \quad \text{eller} \quad \text{distanse} = \text{fart} \cdot \text{tid} \quad (11)$$

Dersom vi bruker at luftpakkens fart i x, y, z -retningene er u, v, w , følger det fra det andre uttrykket i (11) at i løpet av tiden δt får vi en forflytning i x, y, z -retningene gitt ved

$$\delta x = u \delta t, \quad \delta y = v \delta t, \quad \delta z = w \delta t \quad (12)$$

Uttrykkene (12) innsatt i (10) gir

$$\delta C = \frac{\partial C}{\partial x} u \delta t + \frac{\partial C}{\partial y} v \delta t + \frac{\partial C}{\partial z} w \delta t + \frac{\partial C}{\partial t} \delta t \quad (13)$$

Dividerer vi ligningen over med δt og flytter $\partial C/\partial t$ -leddet først, får vi

$$\frac{\delta C}{\delta t} = \frac{\partial C}{\partial t} + u \frac{\partial C}{\partial x} + v \frac{\partial C}{\partial y} + w \frac{\partial C}{\partial z} \quad (14)$$

Venstre side, for liten δt , kalles den *totalderiverte av C* :

$$\left. \frac{\delta C}{\delta t} \right|_{\delta t \rightarrow 0} \stackrel{\text{def}}{=} \frac{DC}{Dt} = \frac{\partial C}{\partial t} + u \frac{\partial C}{\partial x} + v \frac{\partial C}{\partial y} + w \frac{\partial C}{\partial z} \quad (15)$$

Den totalderiverte er en sentral størrelse i all væskedynamikk, derav notasjonen DC/Dt .

På vektorform kan den totalderiverte uttrykkes som⁸

$$\frac{DC}{Dt} \stackrel{\text{def}}{=} \frac{\partial C}{\partial t} + \mathbf{u} \cdot \nabla C \quad (16)$$

Her er

$$\mathbf{u} = (u, v, w)$$

hastighetsvektoren og

$$\nabla = \left(\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z} \right) \quad (17)$$

er gradientoperatoren.

Matematisk tolkning Uttrykket for den totalderiverte, uttrykk (15) og (16), kan deles inn i to, fysisk ulike bidrag:

$$\frac{\partial C}{\partial t} \quad \text{og} \quad u \frac{\partial C}{\partial x} + v \frac{\partial C}{\partial y} + w \frac{\partial C}{\partial z} \quad (18)$$

Det første bidraget gir tidsendring av C i et fast punkt, som vi alternativt kan skrive

$$\left. \frac{\partial C}{\partial t} \right|_{x,y,z} \quad (19)$$

Leddet $\partial C/\partial t$, som gir tidsendring av C i et fast punkt, kalles *Eulerisk derivert*.

Det andre bidraget er

$$u \frac{\partial C}{\partial x} + v \frac{\partial C}{\partial y} + w \frac{\partial C}{\partial z} = \mathbf{u} \cdot \nabla C \quad (20)$$

som gir endring av C grunnet luft- eller havstrøm, kalt *adveksjon*.

⁸Vises ved å skrive ut prikk-produktet mellom \mathbf{u} og ∇ i uttrykk (16).

På tilsvarende måte som for $\partial C/\partial t$, holdes alle variabler fast bortsett fra i den retningen derivasjonen utføres, slik at første ledd i (20) kan skrives på formen

$$u \frac{\partial C}{\partial x} \Big|_{y,z,t} \quad (21)$$

Det er generelt ikke vanlig å inkludere senket tekst som y, z, t i uttrykket over, det er da underforstått at alle variable ligger fast unntatt i derivasjonsretningen.

I «dagligtale» For symbolene og uttrykkene over gjelder følgende:

∇ uttales «gradient» og er en vektor,

∇C uttales «gradienten til C » eller «grad C » og er en vektor, og

$\mathbf{u} \cdot \nabla C$ uttales «u prikk grad C » og er en skalar.

Videre har vi at

$\mathbf{u} \cdot \nabla$ uttrykker adveksjon (eller transport), slik at

$\mathbf{u} \cdot \nabla C$ også uttales «adveksjon av C ».

Oppsummering Den totalderiverte DC/Dt , uttrykk (16), har to bidrag som beskriver ulike, fysiske prosesser:

(i) Tidsendring av C , $\partial C/\partial t$, i et fast punkt.

(ii) Endring av C grunnet bevegelse med hastighet \mathbf{u} , $\mathbf{u} \cdot \nabla C$.

En beskrivelse som følger med væskepartikkelens bevegelse, som den totalderiverte DC/Dt , kalles en *Lagrangsk beskrivelse*.

Følgende spesialtilfeller følger direkte fra (15):

Spesialtilfelle 1

$$\frac{\partial C}{\partial t} = 0 \quad (22)$$

betyr at C ikke endrer seg i tid (i et fast punkt).

Spesialtilfelle 2

$$\mathbf{u} \cdot \nabla C = 0 \quad (23)$$

betyr at $\mathbf{u} = \mathbf{0}$ eller $\nabla C = \mathbf{0}$ eller $\mathbf{u} \perp \nabla C$.

Dette betyr at det er et adveksjonsbidrag bare dersom (a) det er en vind/strøm, (ii) at feltet som blir advektert har en gradient og (iii) at feltets gradient ikke står normalt på vind- eller strømretningen.

Spesialtilfelle 3

$$\frac{DC}{Dt} = 0 \quad (24)$$

betyr at det ikke er tidsendring av C når vi følger med bevegelsen.

I dette tilfellet følger det fra definisjonen av den totalderiverte, uttrykk (15), at

$$\frac{\partial C}{\partial t} = -\mathbf{u} \cdot \nabla C \quad (25)$$

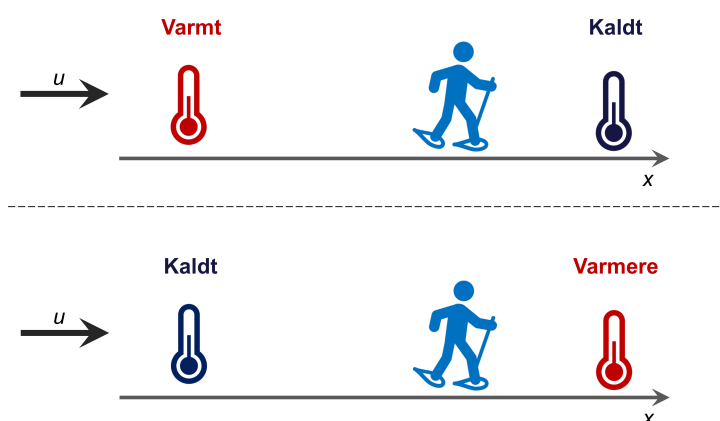
Grafisk tolkning av tilfellet $DT/Dt = 0$ Dersom vi antar at temperaturen T (K eller $^{\circ}\text{C}$) er bevart med bevegelsen, $DT/Dt = 0$, følger det fra definisjonen av den totalderiverte (15) at

$$\frac{\partial T}{\partial t} = -\mathbf{u} \cdot \nabla T \quad (26)$$

I én romlig dimensjon, for eksempel i x -retningen, gir (26)

$$\frac{\partial T}{\partial t} = -u \frac{\partial T}{\partial x} \quad (27)$$

Vi kan nå se på to eksempler på hva (27) innebærer, se figur 4.



Figur 4: Illustrasjon av virkningen av vind i positiv x -retning (dvs. $u > 0$) resulterende i varm (øvre del) eller kald (nedre del) luftadveksjon mot en saktegående trugegåer.

Fra øvre del av figur 4 ser vi at trugegåeren vil erfare stigende lufttemperatur med tiden (under forutsetning av at trugegåerens fart er lavere enn vindfarten).

For samme situasjon sier uttrykk (27) følgende: (1) $\partial T/\partial x < 0$ siden temperaturen avtar i positiv x -retning; (2) $u > 0$ siden vinden blåser i positiv x -retning; (3) høyre side av ligning (27) er da positiv; (4) som medfører $\partial T/\partial t > 0$, eller at temperaturen T øker med tiden. Altså er uttrykk (27) konsistent med hva vi forventer.

Tilsvarende argumentasjon, både basert på å se på figuren og ved å benytte uttrykk (27), gjelder for nedre del av figur 4. I dette tilfellet vil trugegåeren erfare fallende temperatur med tiden.

Eksemplene over er direkte overførbare til negativ vindretning, eller ingen vind, eller ingen temperaturgradient, eller til to eller tre romlige dimensjoner. Dette illustrerer hvor mye informasjon som er pakket sammen i vektorlikheten gitt ved (26).

1.3 Den totalderiverte av hastighetsvektoren \mathbf{u} i et ikke-roterende koordinatsystem

I et ikke-roterende koordinatsystem x, y, z ligger koordinatretningene fast og de tilhørende enhetsvektorene

$$\hat{\mathbf{x}}, \hat{\mathbf{y}}, \hat{\mathbf{z}}$$

endrer seg ikke⁹.

Siden enhetsvektorene i et ikke-roterende koordinatsystem ligger fast, varierer hastighetsvektoren $\mathbf{u} = (u, v, w)$ bare på grunn av variasjoner i hastighetskomponentene u, v, w . Hver av hastighetskomponentene er skalare størrelser. Derfor gjelder den totalderiverte for hver av komponentene u, v, w :

$$\frac{Du}{Dt} = \frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} + w \frac{\partial u}{\partial z} \quad (28)$$

$$\frac{Dv}{Dt} = \frac{\partial v}{\partial t} + u \frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial y} + w \frac{\partial v}{\partial z} \quad (29)$$

$$\frac{Dw}{Dt} = \frac{\partial w}{\partial t} + u \frac{\partial w}{\partial x} + v \frac{\partial w}{\partial y} + w \frac{\partial w}{\partial z} \quad (30)$$

(i uttrykkene over er C i ligning (15) erstattet med henholdsvis u, v, w).

De tre ligningene over kan skrives på vektorform på følgende måte

$$\frac{D\mathbf{u}}{Dt} = \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + \mathbf{u} \cdot \nabla \mathbf{u} \quad (31)$$

Tilsvarende som for den totalderiverte av en skalar funksjon, uttrykker den totalderiverte av \mathbf{u} , $D\mathbf{u}/Dt$, endringen av \mathbf{u} når vi følger med bevegelsen.

1.3.1 Kommentar 1

Uttrykket for den totalderiverte av hastighetsvektoren \mathbf{u} , uttrykk (31), er identisk med de to første leddene i momentumligningen (4). *Den totalderiverte av hastighetsvektoren \mathbf{u} er en væskepartikkels akselerasjon når vi følger med bevegelsen, altså akselerasjonen \mathbf{a} i N2.*

1.3.2 Kommentar 2

I et *roterende* system, som jorden, ligger enhetsvektorene ikke fast; de varierer (roterer) med jordens rotasjon. I dette tilfellet må vi også derivere enhetsvektorene når vi beregner den totalderiverte av \mathbf{u} . Dette gir oss to tilleggsledd i forhold til ligning (31), nemlig Coriolis- og sentrifugalakselerasjonene. Disse sees som de to kryssprodukt-leddene i ligning (31).

1.4 Momentumligningen i et ikke-roterende koordinatsystem

I det følgende betrakter vi et væskeelement formet som en kube med senter i (x, y, z) , med sider med lengde $\delta x, \delta y, \delta z$ og med tetthet ρ , se figur 5.

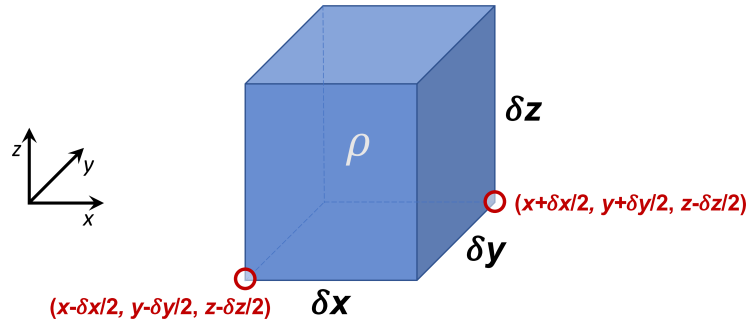
1.4.1 Væskeelementets masse

Væskeelementets masse m (kg) er da gitt ved

$$m = \rho V = \rho \delta x \delta y \delta z \quad (32)$$

hvor V (m^3) er kubens volum.

⁹I dette tilfellet, som ellers i dette emnet, skrives enhetsvektorene med en «hatt», og uttales f.eks. «x hatt».



Figur 5: Et væskeelement formet som en kube med senter i (x, y, z) , med sider med lengde $\delta x, \delta y, \delta z$ og tetthet ρ . Nedre venstre hjørne av kuben har koordinat $(x - \delta x/2, y - \delta y/2, z - \delta z/2)$.

1.4.2 Newtons andre lov

Newtons andre lov, når vi følger med bevegelsen, blir da

$$\mathbf{F} = m \mathbf{a} = m \frac{D\mathbf{u}}{Dt} = m \left(\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + \mathbf{u} \cdot \nabla \mathbf{u} \right) \quad (33)$$

I uttrykket over har vi introdusert den totalderiverte i et ikke-roterende system som beskrevet i avsnitt 1.3.

1.4.3 Krefter som virker

Fra fysikken har vi at følgende krefter \mathbf{F} (N) virker på væskepartikkelen

- (a) **Gravitasjon** med kraft \mathbf{F}_g (N)
- (b) **Trykkgradient** med kraft $\mathbf{F}_{\text{trykk}}$ (N)
- (c) **Friksjon** med kraft \mathbf{F}_{frik} (N)

Målet nå er å matematisk beskrive hver av disse kraftbidragene.

1.4.4 (a) Gravitasjonskraft

Tyngdekraftens virkning er gitt med tyngdeakselerasjonen $g \approx 9.8 \text{ m/s}^2$. Tyngdekraften er rettet mot jordens sentrum, og følgelig i $-\hat{\mathbf{z}}$ -retningen, hvor $\hat{\mathbf{z}}$ er enhetsvektor stående normalt og pekende utover på jordens overflate. Dette gir

$$\mathbf{F}_g = m \mathbf{a} = (\rho \delta x \delta y \delta z)(-g \hat{\mathbf{z}}) = -g \rho \delta x \delta y \delta z \hat{\mathbf{z}} \quad (34)$$

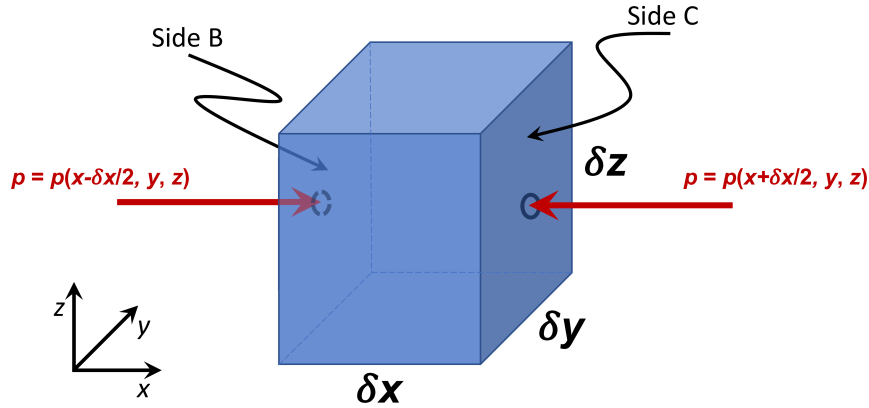
1.4.5 (b) Trykkgradientkraft

Trykkgradientkraft stammer fra virkningen av trykk p (Pa) fra sammenhengen (eller definisjonen)

$$\text{Trykk} = \frac{\text{Kraft}}{\text{Areal}} \quad \text{som tilsvarer} \quad \mathbf{F}_{\text{trykk}} = p \cdot A \quad (35)$$

hvor A (m^2) er arealet trykket virker på.

Vi betrakter samme væskeelement som over, i dette tilfellet med trykk p virkende i x -retningen, det vil på kubens «Side B» og «Side C» i figur 6. Det vil også virke trykk på kubens øvrige sider, men utledningen av trykkgradientkraften for disse følger utledningen for trykk i x -retningen.



Figur 6: Et væskeelement formet som en kube med trykk p virkende på venstre og høyre side, henholdsvis kalt «Side B» og side «Side C» i figuren. Midtpunktet på side B har koordinat $(x - \delta x/2, y, z)$, mens koordinat for midtpunktet på side C er $(x + \delta x/2, y, z)$.

Basert på det andre uttrykket i (35), følger det at trykk-kraften i x -retningen på kubens side B, $F_{\text{trykk}}^{x,B}$, har verdi

$$F_{\text{trykk}}^{x,B} = p(x - \delta x/2, y, z, t) \delta y \delta z \quad (36)$$

Her er $\delta y \delta z$ arealet til side B, og $p(x - \delta x/2, y, z, t)$ viser at trykket virker i sentrum av side B (romlig koordinat $(x - \delta x/2, y, z)$) og ved tiden t .

Siden væskeelementene er infinitesimale, er det helt greit å anta at trykket virker i senter av væskeelementenes sideflater, i dette tilfellet i punktet $(x - \delta x/2, y, z)$.

Tilsvarende er verdien til trykk-kraften på kubens side C

$$F_{\text{trykk}}^{x,C} = p(x + \delta x/2, y, z, t) \delta y \delta z \quad (37)$$

Totalt kraftbidrag i x -retningen, F_{trykk}^x , blir da

$$F_{\text{trykk}}^x = F_{\text{trykk}}^{x,B} - F_{\text{trykk}}^{x,C} \quad (38)$$

Merk minustegnet, dette da $F_{\text{trykk}}^{x,C}$ virker i negativ x -retning.

Uttrykkene (37) og (36) innsatt i (38) gir

$$F_{\text{trykk}}^x = [p(x - \delta x/2, y, z, t) - p(x + \delta x/2, y, z, t)] \delta y \delta z \quad (39)$$

$$= -\frac{\partial p}{\partial x} \delta x \delta y \delta z \quad (40)$$

Den siste overgangen følger fra Taylor-rekke utvikling av p i x -retningen til første orden, se ligning (642). Dette «trikset» gjelder generelt for glatte (dvs. kontinuerlig deriverbare) størrelser og vil bli brukt en rekke ganger:

Enhver differanse av samme størrelse, evaluert symmetrisk om et punkt, gir alltid opphav til den deriverte av størrelsen.

På tilsvarende måte blir trykk-kraftbidraget i y - og z -retningene

$$F_{\text{trykk}}^y = -\frac{\partial p}{\partial y} \delta x \delta y \delta z \quad (41)$$

$$F_{\text{trykk}}^z = -\frac{\partial p}{\partial z} \delta x \delta y \delta z \quad (42)$$

$$(43)$$

De tre trykkbidragene gir

$$\mathbf{F}_{\text{trykk}} = F_{\text{trykk}}^x \hat{\mathbf{x}} + F_{\text{trykk}}^y \hat{\mathbf{y}} + F_{\text{trykk}}^z \hat{\mathbf{z}} \quad (44)$$

$$= -\left(\frac{\partial p}{\partial x} \hat{\mathbf{x}} + \frac{\partial p}{\partial y} \hat{\mathbf{y}} + \frac{\partial p}{\partial z} \hat{\mathbf{z}} \right) \delta x \delta y \delta z \quad (45)$$

$$= -\nabla p \delta x \delta y \delta z \quad (46)$$

Merk minus-tegnet fremfor trykkgradienten ∇p i uttrykk (46)!

Merk også at det bare er *endring* i trykket som kan gi opphav til trykk-kraft, gitt ved ∇p , det er derfor vanlig å bruke «trykkgradientkraft» som navn på kraften.

En gradient er alltid rettet mot økende feltverdi, for eksempel mot økende trykk. På grunn av minustegnet i (46) er *trykkgradientkraften alltid rettet mot lavere trykk*.

Dersom vi tenker oss at vi går i terrenget, og at terrengets høyde representerer varierende trykk, er trykkgradientkraften hele tiden rettet brattest nedover i terrenget. Dette gjelder over alt og alltid.

1.4.6 (c) Friksjonskraft

I dette tilfellet tar vi en snarvei (av årsaker vi snart skal se) og skriver friksjonskraften på formen

$$\mathbf{F}_{\text{frik}} = \rho \mathcal{F} \delta x \delta y \delta z \quad (47)$$

I ligningen over betegner \mathcal{F} friksjonskraft per enhetsmasse. \mathcal{F} inkluderer alle andre krefter som virker i en væske, ikke bare friksjon, men for eksempel også viskøse krefter. Vi kommer tilbake til \mathcal{F} i kapittel 7 og 10 i M&P.

1.4.7 Oppsummert

Vi kan nå skrive N2 for en væske, $\mathbf{F} = m \mathbf{a}$, ved å benytte uttrykk for \mathbf{F} (uttrykkene 34, 46 og 47), m (uttrykk 32) og $\mathbf{a} = D\mathbf{u}/Dt$ (uttrykk 31), henholdsvis

$$\mathbf{F}_g = -g \rho \delta x \delta y \delta z \hat{\mathbf{z}}$$

$$\mathbf{F}_{\text{trykk}} = -\nabla p \delta x \delta y \delta z$$

$$\mathbf{F}_{\text{frik}} = \rho \mathcal{F} \delta x \delta y \delta z$$

$$m = \rho \delta x \delta y \delta z$$

$$\mathbf{a} = \frac{D\mathbf{u}}{Dt} = \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + \mathbf{u} \cdot \nabla \mathbf{u}$$

N2 på formen $m \mathbf{a} = \mathbf{F}$ gir da

$$\rho \delta x \delta y \delta z \frac{D\mathbf{u}}{Dt} = -g \rho \delta x \delta y \delta z \hat{\mathbf{z}} - \nabla p \delta x \delta y \delta z + \rho \mathcal{F} \delta x \delta y \delta z \quad (48)$$

Vi kan dividere uttrykket over med væskeelementets masse $\rho \delta x \delta y \delta z$, som gir

$$\frac{D\mathbf{u}}{Dt} = -g \hat{\mathbf{z}} - \frac{1}{\rho} \nabla p + \mathcal{F} \quad (49)$$

Av visuelle, historiske årsaker, er det vanlig å skrive (49) på formen

$$\frac{D\mathbf{u}}{Dt} + \frac{1}{\rho} \nabla p + g \hat{\mathbf{z}} = \mathcal{F} \quad (50)$$

Uttrykkene (49) og (50) er N2 for en væske i et ikke-roterende system, også kalt *momentumligningen* i et ikke-roterende system.

Valget av friksjonskraften (47) sees nå, dette er for å gi en visuelt «pen» momentumligning, uttrykkene (49) og (50). Vi kommer tilbake til hvordan for eksempel friksjon mot bakken i atmosfæren og vindens friksjonsvirkning på havet kan uttrykkes i stedet for symbolet \mathcal{F} .

Momentumligningen (49) uttrykker, ledd for ledd:

- Akselerasjon når vi følger med bevegelsen; $D\mathbf{u}/Dt$
- Tyngdekraft per enhetsmasse; $-g \hat{\mathbf{z}}$
- Trykkgradientkraft per enhetsmasse; $-(1/\rho) \nabla p$
- Friksjonskraft (eller alle andre krefter) per enhetsmasse; \mathcal{F}

Årsaken til at kraftbidragene i momentumligningen kalles «kraft per enhetsmasse» er divisjonen av masse i overgangen mellom uttrykk (48) og (49). Alternativt ser vi at alle ledd i momentumligningene (49) og (50) har dimensjon m/s^2 (altså akselerasjon), som fra N2 er det samme som \mathbf{F}/m .

Merk at kraftleddene med fysisk korrekt fortegn er gitt med uttrykk (49), og som skrevet i listingen over. Samtidig er det momentumligningen i versjon (50) som er oftest å finne i faglitteraturen. Dette kan være (og er) forvirrende; men det viktigste er å huske at

Momentumligningen på form (49) viser de fysiske leddene med korrekt fortegn.

1.4.8 Momentumligningen å komponentform

På komponentform kan vi skrive momentumligningen (50) som

$$\frac{Du}{Dt} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} = \mathcal{F}_x \quad (51)$$

$$\frac{Dv}{Dt} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial y} = \mathcal{F}_y \quad (52)$$

$$\frac{Dw}{Dt} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial z} + g = \mathcal{F}_z \quad (53)$$

1.4.9 Hydrostatisk tilnærming

For *storskala bevegelse*¹⁰ er oftest vertikal akselerasjon Dw/Dt og friksjon \mathcal{F}_z små størrelser. Med disse antagelsene følger det direkte fra ligning (53) at

$$\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial z} + g = 0 \quad (54)$$

Dette gir ligning for *hydrostatisk tilnærming* eller *hydrostatisk balanse*:

$$\frac{\partial p}{\partial z} = -\rho g \quad (55)$$

Hydrostatisk tilnærming eller hydrostatisk balanse

$$\frac{\partial p}{\partial z} = -\rho g$$

gjelder for (nesten) all storskala bevegelse i atmosfære og hav og er en meget god – og mye brukt – tilnærming.

1.5 Momentumligningen i et roterende koordinatsystem (§6.2)

I det følgende skal vi se på hvordan momentumligningen (49) kan uttrykkes i et roterende koordinatsystem. Åsaken til at vi vil bruke et roterende koordinatsystem er at vi måler/observerer bevegelsen i atmosfære og hav fra/på jorden, det vil si i et roterende koordinatsystem siden jorden roterer rundt sin rotasjonsakse. N2 – som uttrykt med momentumligningen i avsitt 1.4 – gjelder kun for et ikke-roterende koordinatsystem. Følgelig må vi overføre momentumligningen (49) til et roterende system.

1.5.1 Skalare- og vektorstørrelser i et roterende koordinatsystem

En skalar (ett tall) har alltid samme verdi i et roterende og ikke-roterende system. Tenk på temperatur målt på jorden versus observert (dvs. sett) fra en fiksstjerne; termometeret viser én

¹⁰For atmosfæren gjelder dette typisk for bevegelse fra romlig utstrekning til lav- og høetrykk og oppover, som gjerne betyr prosesser med en horisontal utstrekning fra rundt 500 km og oppover. For havet gjelder tilsvarende; prosesser som har en horisontal utstrekning fra virvelstørrelse og oppover, typisk fra noen 50–10 km og oppover.

og samme verdi. Skalare størrelser og ligninger er derfor identiske i et roterende og ikke-roterende system.

En vektor – som har lengde og retning – endrer *retning* med tiden i et roterende koordinatsystem. Tenk på vind målt et sted på jorden, for eksempel at det er konstant vestlig vind på 10 m/s. Fra jorden vil vi si at vindvektoren hele tiden peker mot øst. Fra en fiksstjerne vil vi se at vindvektoren roterer med jordens rotasjon, og at vindvektoren har rotert 360 grader i løpet av et døgn. Følgelig *endrer* vindvektorens retning seg sett fra en fiksstjerne. Av denne årsak må momentumligningens akselerasjonsledd $D\mathbf{u}/Dt$, på grunn av at hastighetsvektoren \mathbf{u} er forskjellig sett fra jorden og en fiksstjerne, overføres fra et fikssystem (som til nå) til et roterende system.

Sammenhengen mellom en vektor i et ikke-roterende og et roterende system kan utledes ved først å betrakte hvordan en vektor med fast lengde endrer seg i tid (avsnitt 1.5.4). Deretter ser vi på hvordan den totalderiverte av en generell vektor, dvs. en vektor hvor både lengde og retning varierer, kan beskrives i de to systemene (avsnitt 1.5.5). Og endelig anvender vi disse resultatene på uttrykket for den totalderiverte av hastighetsvektoren $D\mathbf{u}/Dt$ i momentumligningen (avsnitt 1.5.6). Men først noen ord om jordens rotasjonsvektor.

1.5.2 Kommentar

En kunne kanskje tro at momentumligningens trykkgradientledd, $-(1/\rho)\nabla p$, som er en vektor, må transformeres fra et ikke-roterende til et roterende system. Dette er ikke tilfellet; merk at tiden holdes fast når gradienten i trykkgradientleddet beregnes. Og som beskrevet over, er trykk p en skalar størrelse med verdi som er uavhengig av koordinatsystemet vi bruker.

Følgelig endres ikke trykkgradientleddet – eller de andre leddene på høyre side av ligning (49) – når vi går fra et ikke-roterende system (sett fra en fiksstjerne) til et roterende koordinatsystem på jorden.

1.5.3 Jordens rotasjonsvektor

Jordens rotasjonsvektor $\boldsymbol{\Omega}$ er rettet oppover sett fra en fiksstjerne (i hht. høyrehåndsregelen), se figur 7, og har verdi

$$\Omega = \frac{2\pi}{T} \approx \frac{2\pi}{86400 \text{ s}} \approx 7.3 \cdot 10^{-5} \text{ rad s}^{-1} \quad (56)$$

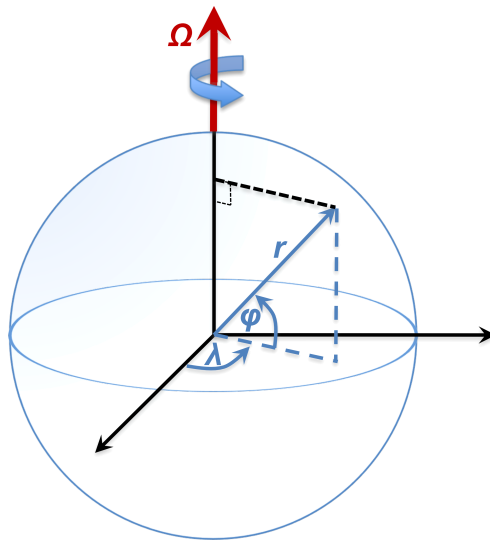
Her er T tiden til en full rotasjon (dvs. 24 timer = 86400 s). Enheten til Ω er 1/s, som da er underforstått rad/s, der rad er radianer.

Sett fra det ikke-roterende fikssystemet roterer jorden mot høyre, det vil si fra vest mot øst, se figur 7.

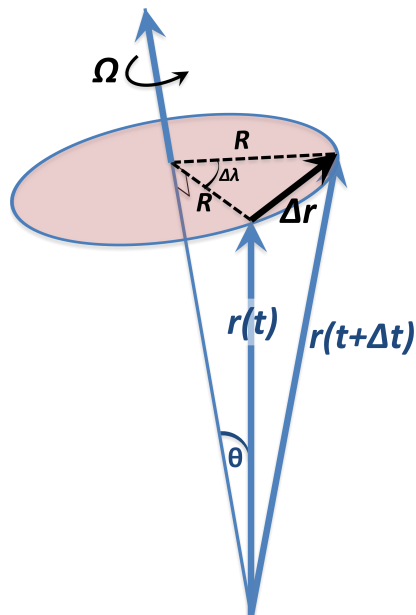
1.5.4 Tidsderivert av posisjonsvektor i et roterende koordinatsystem

Et fast punkt på jorden, for eksempel på 60° N, kan beskrives med en vektor med konstant lengde men som endrer retning sett fra et fikssystem, som illustrert med vektoren $\mathbf{r}(t)$ i figur 8. Vektoren $\mathbf{r}(t)$ spenner ut et sirkulært plan med tiden sett fra en fiksstjerne. En vektor som har konstant lengde men som endrer retning kalles ofte en *posisjonsvektor*.

Vi betrakter posisjonsvektoren \mathbf{r} som har konstant lengde men som endrer retning grunnet rotasjon med vinkelhastighet $\boldsymbol{\Omega}$ om rotasjonsaksen som vist i figur 8. I det roterende koordinatsystemet er $\mathbf{r}(t)$ konstant i tid, slik at $\mathbf{r}(t) = \mathbf{r}(t + \Delta t)$. Men betraktet fra et fast koordinatsystem, et fikssystem, endrer posisjonsvektoren seg fra $\mathbf{r}(t)$ til $\mathbf{r}(t + \Delta t)$ i løpet av tiden Δt . Siden det



Figur 7: Jordens rotasjonsvektor Ω rettet oppover sett fra en fiksstjerne. I tillegg viser figuren lengdegrad λ (relativt til Greenwich-meridianen) og breddegrad φ (relativt til jordens ekvatorplan) til en vilkårlig posisjonsvektor \mathbf{r} på jordens overflate.



Figur 8: Illustrasjon av tidsendringen til en posisjonsvektor $\mathbf{r}(\mathbf{t})$ som roterer mot klokken med konstant vinkelhastighet $\Omega = |\Omega|$. R er radius til sirkelen som posisjonsvektoren $\mathbf{r}(\mathbf{t})$ spenner ut (lyserødt plan i figuren). I løpet av tiden Δt beveger posisjonsvektoren seg en avstand Δr i det fargede sirkulasjonsplanet.

kun er endring av \mathbf{r} grunnet rotasjon vi betrakter her, ikke lengden til \mathbf{r} , er $|\mathbf{r}| = \text{konst.}$ i det følgende. Tilfellet med en generell vektor \mathbf{A} som roterer *og* som endrer lengde er utledet i påfølgende avsnitt.

Fra uttrykket for en buelengde (534) følger det at lengden av $\Delta\mathbf{r}$ kan skrives som

$$\Delta r = R\Delta\lambda = r \sin\theta\Delta\lambda \quad (57)$$

Videre er

$$\Delta\lambda = \Omega\Delta t \quad (58)$$

hvor $\Omega = |\boldsymbol{\Omega}|$. Det følger da fra (57) og (58) at

$$\frac{\Delta r}{\Delta t} = \Omega r \sin\theta \quad (59)$$

For $\Delta t \rightarrow 0$, får vi

$$\frac{dr}{dt} = \Omega r \sin\theta \quad (60)$$

eller, fra definisjonen av et kryssprodukt (avsnitt A.8), at

$$\frac{d\mathbf{r}}{dt} = \boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{r} \quad (61)$$

Merk at høyrehåndsregelen gir at $\boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{r}$ er rettet langs $\Delta\mathbf{r}$ i figur 8. Sett fra et fast (ikke-roterende) koordinatsystem er derfor tidsendringen av den roterende posisjonsvektoren \mathbf{r} gitt ved (61).

Transformasjonen

$$\frac{d\mathbf{r}}{dt} = \boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{r}$$

er grunnleggende for å utlede sammenhengen mellom bevegelsesligningene i et ikke-roterende og roterende koordinatsystem.

1.5.5 Totalderivert av en generell vektor \mathbf{A} i et roterende koordinatsystem

Vi starter med å betrakte et koordinatsystem som ligger fast, et fikssystem (navn etter fiksstjernerne), og et som roterer rundt en koordinatakse. Fikssystemet er angitt med umerkede størrelser og subskrift f , mens merkede størrelser og subskrift r betegner det roterende systemet. For enkelhetsskyld har koordinatsystemene felles origo og rotasjonen skjer langs den felles z -aksen (slik at z og z' er samme størrelse), se figur 9.

Vektoren \mathbf{A} kan entydig uttrykkes i begge systemer:

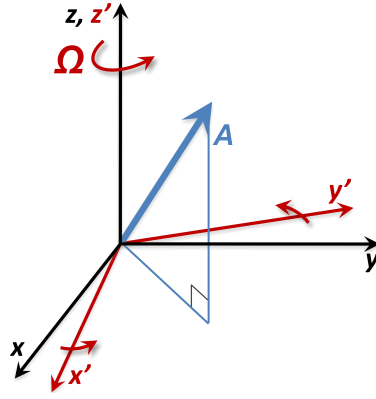
$$\mathbf{A} = \hat{\mathbf{x}}A_x + \hat{\mathbf{y}}A_y + \hat{\mathbf{z}}A_z \quad (62)$$

$$\mathbf{A}' = \hat{\mathbf{x}}'A'_x + \hat{\mathbf{y}}'A'_y + \hat{\mathbf{z}}'A'_z \quad (63)$$

$$\mathbf{A} = \mathbf{A}' \quad (64)$$

Sett fra det roterende koordinatsystemet ligger enhetsvektorene $\hat{\mathbf{x}}'$, $\hat{\mathbf{y}}'$ og $\hat{\mathbf{z}}'$ fast, slik at den tidsderiverte av \mathbf{A}' i dette tilfellet er gitt ved den tidsderiverte av \mathbf{A}' sine komponenter

$$\left. \frac{D\mathbf{A}'}{Dt} \right|_r = \hat{\mathbf{x}}' \left. \frac{DA'_x}{Dt} \right|_r + \hat{\mathbf{y}}' \left. \frac{DA'_y}{Dt} \right|_r + \hat{\mathbf{z}}' \left. \frac{DA'_z}{Dt} \right|_r \quad (65)$$



Figur 9: En vilkårlig vektor \mathbf{A} i et fast (x, y, z) og et roterende (x', y', z') koordinatsystem. Rotasjonen skjer rundt z -aksen, beskrevet med rotasjonsvektoren $\boldsymbol{\Omega}$ (1/s). Dette betyr at z og z' er identiske akser med identiske enhetsvektorer. I tillegg er projeksjonen av \mathbf{A} på det «horisontale» (x, y) - og (x', y') -planet vist.

hvor subskrift r betegner at derivasjonen er gjort i det roterende koordinatsystemet.

På tilsvarende måte kan den tidsderiverte sett fra fikssystemet (subskrift f) skrives som

$$\left. \frac{D\mathbf{A}}{Dt} \right|_f = \hat{\mathbf{x}} \left. \frac{DA_x}{Dt} \right|_f + \hat{\mathbf{y}} \left. \frac{DA_y}{Dt} \right|_f + \hat{\mathbf{z}} \left. \frac{DA_z}{Dt} \right|_f \quad (66)$$

Sett fra fikssystemet, vil *enhetsvektorene i det roterende koordinatsystemet endre seg i tid*. Siden $\mathbf{A} = \mathbf{A}'$, følger det at

$$\begin{aligned} \left. \frac{D\mathbf{A}}{Dt} \right|_f = \left. \frac{D\mathbf{A}'}{Dt} \right|_f &= \hat{\mathbf{x}}' \left. \frac{DA'_x}{Dt} \right|_f + \hat{\mathbf{y}}' \left. \frac{DA'_y}{Dt} \right|_f + \hat{\mathbf{z}}' \left. \frac{DA'_z}{Dt} \right|_f \\ &+ \left. \frac{D\hat{\mathbf{x}}'}{Dt} \right|_f A'_x + \left. \frac{D\hat{\mathbf{y}}'}{Dt} \right|_f A'_y + \left. \frac{D\hat{\mathbf{z}}'}{Dt} \right|_f A'_z \end{aligned} \quad (67)$$

Fra transformasjonsuttrykket for en posisjonsvektor i et roterende koordinatsystem (61), følger det at den totalderiverte av enhetsvektorene $\hat{\mathbf{x}}'$, $\hat{\mathbf{y}}'$ og $\hat{\mathbf{z}}'$ er gitt ved

$$\left. \frac{D\hat{\mathbf{x}}'}{Dt} \right|_f = \boldsymbol{\Omega} \times \hat{\mathbf{x}}' \quad (68)$$

$$\left. \frac{D\hat{\mathbf{y}}'}{Dt} \right|_f = \boldsymbol{\Omega} \times \hat{\mathbf{y}}' \quad (69)$$

$$\left. \frac{D\hat{\mathbf{z}}'}{Dt} \right|_f = \boldsymbol{\Omega} \times \hat{\mathbf{z}}' \quad (70)$$

Fra de tre siste leddene i (67) har vi at de tre uttrykkene over skal multipliseres med henholdsvis A'_x , A'_y og A'_z . Dette gir

$$\left. \frac{D\hat{\mathbf{x}}'}{Dt} \right|_f A'_x + \left. \frac{D\hat{\mathbf{y}}'}{Dt} \right|_f A'_y + \left. \frac{D\hat{\mathbf{z}}'}{Dt} \right|_f A'_z = \boldsymbol{\Omega} \times (A'_x \hat{\mathbf{x}}' + A'_y \hat{\mathbf{y}}' + A'_z \hat{\mathbf{z}}') = \boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{A}' \quad (71)$$

Videre er tidsendringen av lengden til \mathbf{A}' sine komponenter, som er skalare størrelser, identisk i de to koordinatsystemene

$$\left. \frac{DA'_x}{Dt} \right|_f = \left. \frac{DA'_x}{Dt} \right|_r \quad (72)$$

$$\left. \frac{DA'_y}{Dt} \right|_f = \left. \frac{DA'_y}{Dt} \right|_r \quad (73)$$

$$\left. \frac{DA'_z}{Dt} \right|_f = \left. \frac{DA'_z}{Dt} \right|_r \quad (74)$$

Dette gir at

$$\hat{\mathbf{x}}' \left. \frac{DA'_x}{Dt} \right|_f + \hat{\mathbf{y}}' \left. \frac{DA'_y}{Dt} \right|_f + \hat{\mathbf{z}}' \left. \frac{DA'_z}{Dt} \right|_f = \left. \frac{D\mathbf{A}'}{Dt} \right|_r \quad (75)$$

Uttrykkene (71) og (75) innsatt i (67), gir

$$\left. \frac{D\mathbf{A}'}{Dt} \right|_f = \left. \frac{D\mathbf{A}'}{Dt} \right|_r + \boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{A}' \quad (76)$$

Eller, for en vilkårlig vektor \mathbf{A} ,

$$\boxed{\left. \frac{D\mathbf{A}}{Dt} \right|_f = \left. \frac{D\mathbf{A}}{Dt} \right|_r + \boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{A}} \quad (77)$$

Med notasjonen over kan tidsendringen av posisjonsvektoren \mathbf{r} i (61) skrives på formen

$$\left. \frac{d\mathbf{r}}{dt} \right|_f = \boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{r} \quad (78)$$

1.5.6 Utledning av fiktive akselerasjoner i et roterende koordinatsystem

Uttrykket (77) kan brukes til å relatere tidsendringen av hastighetsvektorene, det vil si akselerasjonen eller $d^2\mathbf{r}/dt^2$, i et fikssystem og i et roterende system, ved først å erstatte \mathbf{A} med en væskepartikkels posisjon \mathbf{r} , hvor \mathbf{r} kan endre både absoluttverdi og retning:

$$\left. \frac{D\mathbf{r}}{Dt} \right|_f = \left. \frac{D\mathbf{r}}{Dt} \right|_r + \boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{r} \quad (79)$$

De to første leddene i uttrykket over gir hastigheten i henholdsvis fikssystemet \mathbf{u}_f og det roterende systemet \mathbf{u}_r , slik at (79) kan skrives som

$$\mathbf{u}_f = \mathbf{u}_r + \boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{r} \quad (80)$$

Videre følger det at akselerasjonen i et fikssystem kan uttrykkes som

$$\left. \frac{D\mathbf{u}_f}{Dt} \right|_f \stackrel{(77)}{=} \left. \frac{D\mathbf{u}_f}{Dt} \right|_r + \boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{u}_f \quad (81)$$

$$\stackrel{(80)}{=} \left[\left. \frac{D}{Dt} (\mathbf{u}_r + \boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{r}) \right]_r + \boldsymbol{\Omega} \times (\mathbf{u}_r + \boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{r}) \quad (82)$$

$$= \left[\left. \frac{D\mathbf{u}_r}{Dt} + \boldsymbol{\Omega} \times \frac{D\mathbf{r}}{Dt} \right]_r + \boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{u}_r + \boldsymbol{\Omega} \times (\boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{r}) \quad (83)$$

$$= \left. \frac{D\mathbf{u}_r}{Dt} \right|_r + 2\boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{u}_r + \boldsymbol{\Omega} \times (\boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{r}) \quad (84)$$

I overgangene (81) og (83) har vi brukt at $\boldsymbol{\Omega} = \text{konst.}$, slik at vi ikke får bidrag fra $D\boldsymbol{\Omega}/Dt$.

1.5.7 Momentumligningen i et roterende koordinatsystem

Med notasjonen brukt over, kan momentumligningen i et ikke-roterende system, se ligning (50), skrives som

$$\left. \frac{D\mathbf{u}_f}{Dt} \right|_f + \frac{1}{\rho} \nabla p + g \hat{\mathbf{z}} = \mathcal{F} \quad (85)$$

Den totalderiverte av \mathbf{u}_f kan nå overføres til et roterende system ved å benytte (84). Dette gir

$$\left. \frac{D\mathbf{u}_r}{Dt} \right|_r + \frac{1}{\rho} \nabla p + g \hat{\mathbf{z}} = -2\boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{u}_r - \boldsymbol{\Omega} \times (\boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{r}) + \mathcal{F} \quad (86)$$

Siden det nå er underforstått at (86) uttrykker bevegelsesligningen i et roterende koordinatsystem, kan subskriften r droppes fra ligningen.

Dette gir standard form av momentumligningen i et roterende koordinatsystem, uten forenklinger (se under),

$$\boxed{\frac{D\mathbf{u}}{Dt} + \frac{1}{\rho} \nabla p + g \hat{\mathbf{z}} = -2\boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{u} - \boldsymbol{\Omega} \times (\boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{r}) + \mathcal{F}} \quad (87)$$

I ligningen over er

- $-2\boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{u}$ Coriolisakselerasjonen og
- $-\boldsymbol{\Omega} \times (\boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{r})$ sentrifugalakselerasjonen

Merk at de to akselerasjonene har negativt fortegn.

Leddene kalles for *fiktive* akselerasjoner, det vil si at de representerer tilsynelatende akselerasjoner som følge av at bevegelsesligningen er uttrykt i et roterende koordinatsystem.

Siden akselerasjon er det samme som kraft per enhetsmasse, kalles de to fiktive bidragene over også *Corioliskraft per enhetsmasse* og *sentrifugalkraft per enhetsmasse*.

Kommentar om Coriolisleddet Coriolisakselerasjonen er proporsjonal med \mathbf{u} og *påvirker all massebevegelse* i atmosfære og hav.

Kommentar om sentrifugalledet Sentrifugalakselerasjonen virker over alt og alltid, uavhengig av bevegelse (bortsett i polpunktene hvor $\boldsymbol{\Omega} \parallel \mathbf{r}$ og derfor er $\boldsymbol{\Omega} \times (\boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{r}) = 0$).

1.5.8 Bevegelsesligningen i et roterende system, ledd for ledd

Bevegelsesligningen (87) har følgende ledd, med fysisk korrekt fortegn:

$$\underbrace{\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t}}_1 + \underbrace{\mathbf{u} \cdot \nabla \mathbf{u}}_2 = - \underbrace{\frac{1}{\rho} \nabla p}_3 - \underbrace{g \hat{\mathbf{z}}}_4 - \underbrace{2\boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{u}}_5 - \underbrace{\boldsymbol{\Omega} \times (\boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{r})}_6 + \underbrace{\mathcal{F}}_7 \quad (88)$$

Her er

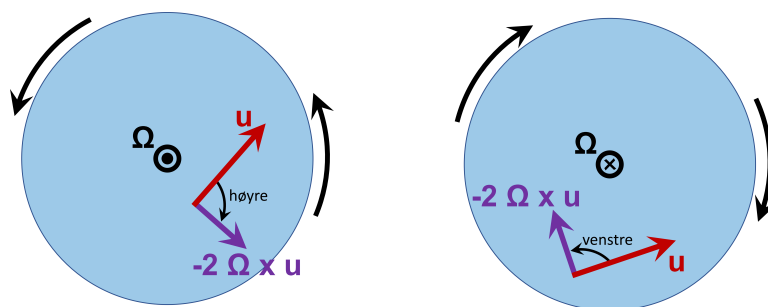
- 1 Lokal tidsendring av hastighet \mathbf{u} i et fast punkt (en akselerasjon)

- 2 Adveksjon av hastighet \mathbf{u} (en akselerasjon)
- 3 Trykkgradientkraft per enhetsmasse
- 4 Tyngdekraft per enhetsmasse
- 5 Coriolisakselerasjon (evt. Corioliskraft per enhetsmasse)
- 6 Sentrifugalakselerasjon (evt. sentrifugalkraft per enhetsmasse)
- 7 Friksjonskraft (og alle andre krefter som måtte virke) per enhetsmasse

1.5.9 Coriolisakselerasjonens virkning på en roterende disk

Før vi introduserer kulekoordinater for å beskrive Coriolisakselerasjonens breddegradsavhengighet på jorden, kan vi betrakte en roterende disk. Ser vi ned på disken, og dersom disken roterer mot klokken, har vi en situasjon som vist i venstre del av figur 10. Denne konfigureringen tilsvarer at vi står over og ser ned på jordens nordpol, med jordens rotasjonsvektor $\boldsymbol{\Omega}$ pekende mot oss.

Tilsvarende viser venstre del av figur 10 at vi ser ned på en disk som roterer med klokken. Dette tilsvarer at vi står over og ser ned på jordens sørpol, med jordens rotasjonsvektor pekende fra oss (dvs. inn i papirplanet).



Figur 10: Jorden sett ned på nordpol (venstre) og sørpol (høyre). $\boldsymbol{\Omega}$ er jordens rotasjonsvektor, \mathbf{u} er en vilkårlig hastighetsvektor i det blå planet og $-2\boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{u}$ er tilhørende Coriolisakselerasjon. For en morsom sjekk i hvilken retning jorden roterer sett ned på nordpolen og sørpolen, se <https://www.nrk.no/innlandet/full-forvirring-om-hvilken-veg-jorda-snurrer-1.15347098>

For en gitt hastighetsvektor \mathbf{u} på disken, følger retningen til Coriolisakselerasjonen direkte fra høyrehåndsregelen.

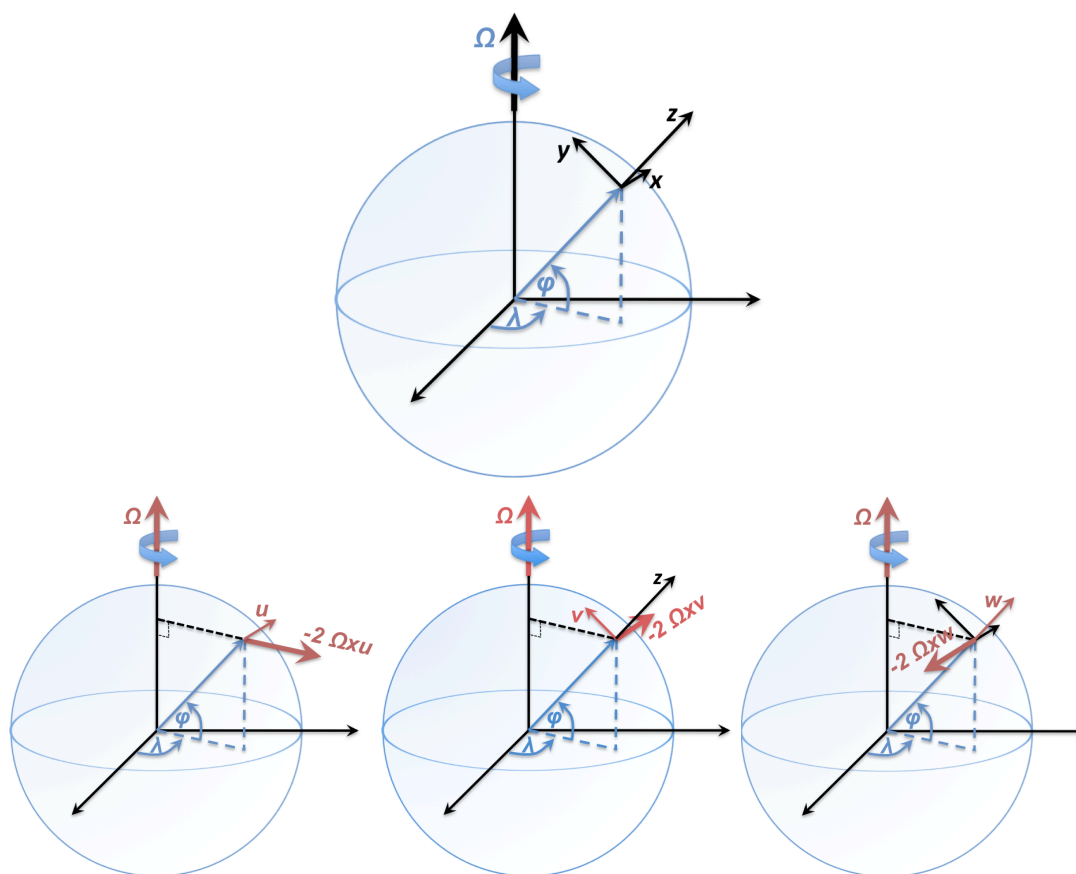
For enhver hastighetsvektor \mathbf{u} på den nordlige halvkule er Coriolisakselerasjonen alltid rettet 90 grader til høyre for \mathbf{u} . Tilsvarende er Coriolisakselerasjonen alltid rettet 90 grader til venstre for \mathbf{u} på den sørlige halvkule.

Tilsvarende regel gjelder for en kule. Men i dette tilfellet vil Coriolisvirkningen *avta* ettersom vi nærmer oss ekvator. Mer om dette i de neste avsnittene.

1.5.10 Coriolisakselerasjonen på en kule

Vi legger inn et lokalt (x, y, z) koordinatsystem på jordoverflaten med $\hat{\mathbf{x}}$ rettet østover, $\hat{\mathbf{y}}$ rettet nordover og $\hat{\mathbf{z}}$ rettet utover relativt til jordens overflate, se øverste del av figur 11. Denne

orienteringen er hensiktsmessig for å studere bevegelsen i atmosfære og hav, og vi vil ofte benytte dette lokale koordinatsystemet fremover.



Figur 11: Øverst: Jorden med et lokalt roterende koordinatsystem (x, y, z) . x er rettet østover, y nordover og z utover relativt til jordens overflate. Rotasjonsjonen foregår i østlig retning og er gitt med Ω . λ betegner lengdegrad og φ breddegrad. Nederst, fra venstre: $-2\Omega \times (u, 0, 0)$, $-2\Omega \times (0, v, 0)$ og $-2\Omega \times (0, 0, w)$.

Vi kan nå se på orienteringen til Coriolisledet $-2\Omega \times \mathbf{u}$ når hastighetsvektoren kun har bidrag i x -, y - og z -retningene.

I tilfellet $\mathbf{u} = (u, 0, 0)$, som betyr bevegelse mot øst, gir høyrehåndsregelen at Coriolisledet er rettet utover, normalt på Ω . Dette er vist i nederste, venstre panel i figur 11.

Dersom $\mathbf{u} = (0, v, 0)$, som er nordoverrettet bevegelse, gir høyrehåndsregelen at Coriolisledet er rettet østover, i x -retningen, se nederste, midtre panel i figur 11.

Er $\mathbf{u} = (0, 0, w)$, som er utoverrettet bevegelse, gir høyrehåndsregelen at Coriolisledet er rettet vestover, i negativ x -retning, se nederste, høyre panel i figur 11.

Generelt vil hastighetsvektoren ha bidrag i alle tre koordinatretninger. Coriolisledets retning vil da være gitt av bidraget i hver retning.

Geometrisk tolkning av Coriolisleddets orientering For hver av de tre spesieltfellene av \mathbf{u} over – og mer generelt for enhver orientering av \mathbf{u} – kan Coriolisleddets orientering forstås geometrisk. Prøv å forstå hvordan basert på de tre spesieltfellene over!

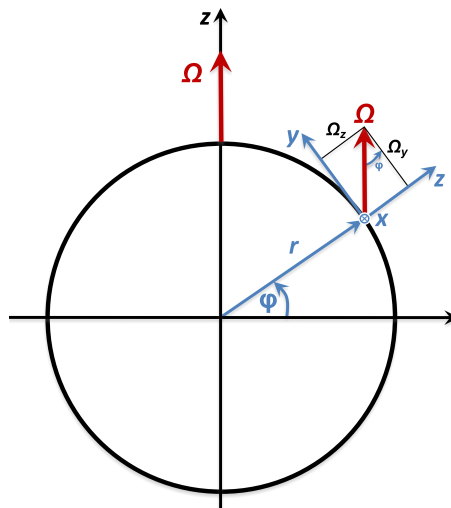
Coriolisleddet på den nordlige vs sørlige halvkule Coriolisleddets form er identisk på de to halvkulene, men enhetsvektoren $\hat{\mathbf{z}}$ – som alltid peker utover, normalt på jordens overflate – peker i motsatt retning på de to halvkulene. På den nordlige halvkule peker $\hat{\mathbf{z}}$ og rotasjonsvektoren $\boldsymbol{\Omega}$ i samme retning (dvs. begge har en komponent som peker mot polarstjernen). På den sørlige halvkule peker de to vektorene i motsatt retning; $\hat{\mathbf{z}}$ er vendt bort fra polarstjernen. Denne forskjellen gjør at Coriolisleddet har motsatt virkning på de to halvkulene.

1.5.11 Coriolisleddet på komponentform

Vi betrakter koordinatsystemet som vist øverst i figur 11. Uttrykt i det lokale koordinatsystem (x, y, z) som roterer med jorden og hvor x -aksen er rettet østover, y -aksen nordover og z -aksen radielt utover, følger det at rotasjonsvektoren $\boldsymbol{\Omega}$ kan skrives på komponentform som

$$\boldsymbol{\Omega} = \Omega(0, \cos \varphi, \sin \varphi) \quad (89)$$

Dekomponeringen er vist i figur 12, og fremkommer med å flytte rotasjonsvektoren $\boldsymbol{\Omega}$ til senter av det lokale koordinatsystemet, og ved å bruke at $\boldsymbol{\Omega}$ kun har bidrag i y - og z -retningene.



Figur 12: Dekomponering av rotasjonsvektoren $\boldsymbol{\Omega}$ i det lokale (x, y, z) -systemet.

Coriolisakselerasjonen blir da

$$-2\boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{u} = -2\Omega(w \cos \varphi - v \sin \varphi, u \sin \varphi, -u \cos \varphi) \quad (90)$$

hvor $\mathbf{u} = (u, v, w)$ er hastighetsvektorens komponenter i (x, y, z) -retningene.

Fra (90), og med hjelp av de nederste panelene i figur 11, ser vi følgende

- u bidrar i Coriolisakselerasjonens y - og z -retninger fordi $-2\boldsymbol{\Omega} \times (u, 0, 0)$ er rettet radielt ut fra rotasjonsaksen, det vil si at $-2\boldsymbol{\Omega} \times (u, 0, 0)$ har en komponent i positiv y -retning (nordover) og en komponent i positiv z -retning (utover, normalt på jordens overflate).
- v bidrar kun til Coriolisakselerasjonens x -retning fordi $-2\boldsymbol{\Omega} \times (0, v, 0)$ er rettet i positiv x -retning.
- w bidrar kun til Coriolisakselerasjonens x -retning fordi $-2\boldsymbol{\Omega} \times (0, 0, w)$ er rettet i negativ x -retning.

1.5.12 Coriolisakselerasjonen på forenklet form

Vi tar utgangspunkt i det fulle uttrykket for Coriolisakselerasjonen (90). Generelt er w mye mindre enn den horisontale hastighetskomponenten v (det samme gjelder for u). Under forutsetning av at vi holder oss borte fra ekvator, kan da leddet med w neglisjeres. Videre er Coriolisakselerasjonens z -komponent svært liten i forhold til tyngdeakselerasjonen g . Følgelig kan vi også se bort fra z -komponenten.

Dette betyr at følgende forenklig generelt er gyldig:

$$-2\boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{u} \approx -2\Omega(-v \sin \varphi, u \sin \varphi, 0) = -2\Omega \sin \varphi(-v, u, 0) \quad (91)$$

Uttrykket over kan skrives som

$$\boxed{-2\boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{u} = -f \hat{\mathbf{z}} \times \mathbf{u}} \quad (92)$$

der $\hat{\mathbf{z}}$ er enhetsvektoren i z -retningen og Coriolisparameteren

$$\boxed{f \stackrel{\text{def}}{=} 2\Omega \sin \varphi} \quad (93)$$

Merk at Coriolisparameteren er positiv på den nordlige halvkule og negativ på den sørlige halvkule. For 45° breddegrad er $|f| \approx 1 \times 10^{-4} \text{ s}^{-1}$.

Når det snakkes om «midlere breddegrader», er det vanlig å bruke verdien $f = 1 \times 10^{-4} \text{ s}^{-1}$ på den nordlige halvkule og $f = -1 \times 10^{-4} \text{ s}^{-1}$ på den sørlige halvkule.

Med denne forenklingen – som er brukt for (nær) all storskala dynamikk i atmosfære og hav, kan momentumligningen (88) skrives på formen

$$\boxed{\frac{D\mathbf{u}}{Dt} + \frac{1}{\rho} \nabla p + g \hat{\mathbf{z}} + f \hat{\mathbf{z}} \times \mathbf{u} = -\boldsymbol{\Omega} \times (\boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{r}) + \mathcal{F}} \quad (94)$$

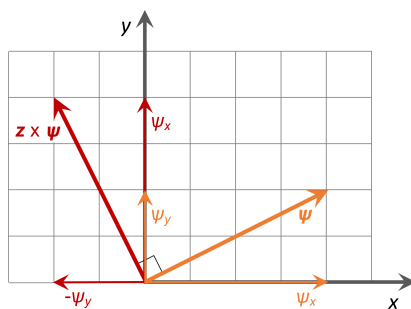
1.5.13 Huskeregel, $\hat{\mathbf{z}} \times \boldsymbol{\psi}$

For enhver to- eller tredimensjonal vektor $\boldsymbol{\psi}$, dvs. for $\boldsymbol{\psi} = (\psi_x, \psi_y, 0)$ eller $\boldsymbol{\psi} = (\psi_x, \psi_y, \psi_z)$, gjelder følgende sammenheng

$$\boxed{\hat{\mathbf{z}} \times \boldsymbol{\psi} = (-\psi_y, \psi_x, 0)} \quad (95)$$

Kryssproduktet $\hat{\mathbf{z}} \times \boldsymbol{\psi}$ er den matematiske måten å uttrykke vektoren som har samme absoluttverdi (lengde) som $\boldsymbol{\psi}$ men som er rotert 90 grader til venstre for $\boldsymbol{\psi}$. Se figur 13.

Sammenhengen (95) benyttes en rekke ganger for å beskrive bevegelsen til en væske i et roterende koordinatsystem.



Figur 13: Illustrasjon av sammenhengen mellom en generell vektor $\boldsymbol{\psi} = (\psi_x, \psi_y)$ og $\hat{\mathbf{z}} \times \boldsymbol{\psi}$.

1.5.14 Coriolisleddet utfører ikke arbeid

Dette kan vises fra momentumligningen med fullt Coriolis-ledd, ligning (88), dersom vi bare betrakter den totalderiverte av \mathbf{u} og Coriolisleddet:

$$\frac{D\mathbf{u}}{Dt} = -2\boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{u} \quad (96)$$

Prikker vi uttrykket (96) med \mathbf{u} , får vi for adveksjonsleddet¹¹

$$\mathbf{u} \cdot \frac{D\mathbf{u}}{Dt} = \frac{D}{Dt} \left(\frac{1}{2} \mathbf{u} \cdot \mathbf{u} \right) = \frac{D}{Dt} \left(\frac{1}{2} |\mathbf{u}|^2 \right) \quad (99)$$

og for Coriolisleddet¹²

$$\mathbf{u} \cdot (-2\boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{u}) = 0 \quad (100)$$

Følgelig gjelder

$$\frac{D}{Dt} (|\mathbf{u}|^2) = 0 \quad (101)$$

Altså er $|\mathbf{u}|$ bevart med bevegelsen i et system der bare Coriolis-akselerasjonen virker.

Starter vi ut med en væske i ro, vil væsken forbli i ro. På tilsvarende måte, starter vi ut med en væske med hastighet \mathbf{u} , vil $|\mathbf{u}|$ forbli konstant. Coriolis-akselerasjonen endrer derfor retningen, men ikke absoluttverdien (eller farten), til \mathbf{u} . Følgelig er kinetisk energi konserverv, og Coriolisleddet utfører ikke *arbeid*. Det siste gjelder for enhver akselerasjon (eller kraft) som virker normalt på hastighetsvektoren.

1.5.15 Egenskaper til Coriolisaksakselerasjonen $-2\boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{u}$

- Er en fiktiv akselerasjon som følge av at bevegelsesligningen er uttrykt i et roterende system.
- Virker bare når det er bevegelse.

¹¹Vises med å skrive ut vektorene på komponentform, f.eks.

$$\frac{D}{Dt} \left(\frac{1}{2} \mathbf{u} \cdot \mathbf{u} \right) = \frac{D}{Dt} \left(\frac{1}{2} (u^2 + v^2 + w^2) \right) = \frac{1}{2} \left(2u \frac{Du}{Dt} + 2v \frac{Dv}{Dt} + 2w \frac{Dw}{Dt} \right) \quad (97)$$

$$= u \frac{Du}{Dt} + v \frac{Dv}{Dt} + w \frac{Dw}{Dt} = \mathbf{u} \cdot \frac{D\mathbf{u}}{Dt} \quad (98)$$

¹²Siden, per definisjon, $(\boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{u}) \perp \mathbf{u}$.

- Er proporsjonal med farten $|\mathbf{u}|$.
- Virker normalt på hastigheten, så bare retningen, ikke farten $|\mathbf{u}|$, endres (se avsnitt 1.5.14).
- Er rettet til høyre for hastighetsvektoren \mathbf{u} på den nordlige halvkule, se figur 10.
- Er rettet til venstre på den sørlige halvkule.
- Er størst ved polene og fraværende ved ekvator (rent formelt gjelder det siste bare dersom bevegelsen er rettet langs jordens overflate, fordi Coriolis har en liten vertikal komponent, se avsnitt 1.5.11).
- Kan forenkles til $-f\hat{\mathbf{z}} \times \mathbf{u}$, der $f = 2\Omega \sin \varphi$ er Coriolisparameteren (se avsnitt 1.5.12).
- Utfører ikke arbeid, slik at kinetisk energi er bevart (gjelder for enhver kraft som virker normalt på hastighetsvektoren, se avsnitt 1.5.14).

1.5.16 Sentrifugalakselerasjonens orientering

Sentrifugalakselerasjonens absoluttverdi følger fra å beregne komponentene til $-\boldsymbol{\Omega} \times (\boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{r})$, ved å benytte definisjonen av et kryssprodukt eller direkte bruk av høyrehåndsregelen.

Bruk av høyrehåndsregelen på det innerste kryssproduktet, se figur 14, gir at

$$\boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{r} \parallel \hat{\mathbf{x}} \quad (102)$$

Ny anvendelse av høyrehåndsregelen gir, for det fulle uttrykket av sentrifugalakselerasjonen,

$$\boxed{-\boldsymbol{\Omega} \times (\boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{r}) \parallel \hat{\boldsymbol{\Omega}}_{\perp}} \quad (103)$$

hvor $\hat{\boldsymbol{\Omega}}_{\perp}$ er enhetsvektor normalt på $\boldsymbol{\Omega}$. Altså er sentrifugalakselerasjonen rettet normalt på rotasjonsaksen. Dette gjelder for alle breddegrader (bortsett fra polpunktene, hvor sentrifugalakselerasjonen ikke har bidrag).

1.5.17 Sentrifugalakselerasjonens absoluttverdi

Bruker vi definisjonen av et kryssprodukt og høyrehåndsregelen, og at vinkelen mellom $\boldsymbol{\Omega}$ og \mathbf{r} er $\pi/2 - \varphi$, se figur 14, gir dette

$$\boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{r} = \Omega r \sin(\pi/2 - \varphi) \hat{\mathbf{x}} = \Omega r \cos \varphi \hat{\mathbf{x}} = \Omega R \hat{\mathbf{x}} \quad (104)$$

Her er $R = r \cos \varphi$ avstanden fra rotasjonsaksen til endepunktet av posisjonsvektoren \mathbf{r} .

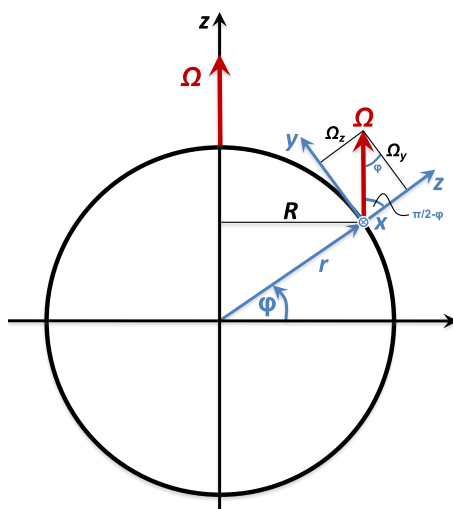
Det ytterste kryssproduktet gir

$$-\boldsymbol{\Omega} \times (\boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{r}) = -\boldsymbol{\Omega} \times (\Omega R \hat{\mathbf{x}}) = \Omega^2 R \hat{\boldsymbol{\Omega}}_{\perp} \quad (105)$$

Følgelig er sentrifugalakselerasjonens absoluttverdi

$$\boxed{|-\boldsymbol{\Omega} \times (\boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{r})| = \Omega^2 R} \quad (106)$$

Siden R er størst ved ekvator, følger det også at sentrifugalakselerasjonen er størst på ekvator. Tilsvarende ser vi at sentrifugalakselerasjonen forsvinner i polpunktene (hvor $R = 0$).



Figur 14: Dekkomponering av rotasjonsvektoren Ω i det lokale (x, y, z) -systemet.

1.5.18 Sentrifugalakselerasjonen på komponentform

Fra avsnitt 1.5.16, følger det at sentrifugalakselerasjonen er rettet normalt på rotasjonsaksen, i retning til enhetsvektoren $\hat{\Omega}_\perp$. Fra figur 14 følger det at

$$\hat{\Omega}_\perp = (0, -\sin \varphi, \cos \varphi) \quad (107)$$

Sentrifugalakselerasjonens komponenter følger da fra (105):

$$-\Omega \times (\Omega \times \mathbf{r}) = \Omega^2 R (0, -\sin \varphi, \cos \varphi) \quad (108)$$

Fra sentrifugalakselerasjonens y -komponent, ser vi at sentrifugalakselerasjonen er søroverrettet på den nordlige halvkule og nordoverrettet på den sørlige halvkule. Dette er konsistent med at jorden buler ut ved ekvator. Og det betyr at dersom jordoverflaten var helt flatt, og uten at andre krefter virket, ville enhver perfekt formet kule som slippes fri på jordoverflaten, uansett hvor, rulle til og ende opp på ekvator.

1.5.19 Egenskaper til sentrifugalakselerasjonen $-\Omega \times (\Omega \times \mathbf{r})$

- Er en fiktiv akselerasjon som følge av at bevegelsesligningen er uttrykt i et roterende system.
- Er *statisk*; virker alltid og over alt (bortsett i polpunktene hvor $-\Omega \times (\Omega \times \mathbf{r}) = 0$).
- Er alltid rettet radielt utover i forhold til rotasjonsvektoren Ω .
- Reduserer gravitasjonen normalt på rotasjonsaksen med $\Omega^2 r \cos \varphi$, der r er jordens radius og φ er breddegrad. Den målte gravitasjonen på jorden er derfor mindre enn om jorden ikke roterte.
- Gir gravitasjonen et bidrag rettet mot ekvator på nordlige og sørlige halvkule, som er grunnen til at jorden buler noe ut ved ekvator.

1.5.20 Sentrifugalleddets virkning i momentumligningen

Fra momentumligningen i et roterende system, se ligning (88), har tyngdekraftleddet (ledd 4) og sentrifugalakselerasjonsleddet (ledd 6) felles egenskaper: Begge virker over alt og alltid. Begge er *konservative krefter*, som betyr at arbeidet som trengs for å flytte en partikkel er bestemt av start- og sluttposisjon til partikkelen, ikke av tilbakelagt vei.

Konservative krefter kan *alltid* skrives som negativ gradient til en skalar funksjon ϕ (N m), ofte kalt et potensial:

$$\mathbf{F}_{\text{kons}} = -\nabla\phi \quad (109)$$

For eksempel kan tyngdekraften per enhetsmasse uttrykkes som en gradient:

$$-\hat{\mathbf{z}}g = -\nabla(gz) \quad (110)$$

I dette tilfellet er den tilhørende potensialfunksjonen $\phi_g = gz$.

Sentrifugalakselerasjonen kan også skrives som gradienten til et potensial¹³

$$\boldsymbol{\Omega} \times (\boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{r}) = -\nabla \left(\frac{\Omega^2 R^2}{2} \right) \quad (111)$$

Ved å kombinere (110) og (111) får vi

$$\hat{\mathbf{z}}g + \boldsymbol{\Omega} \times (\boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{r}) = \nabla\phi \quad (112)$$

der

$$\phi = gz - \frac{\Omega^2 R^2}{2} \quad (113)$$

Altså kan momentumligningen (94) alternativt skrives på formen

$$\boxed{\frac{D\mathbf{u}}{Dt} + \frac{1}{\rho}\nabla p + \nabla\phi + f\hat{\mathbf{z}} \times \mathbf{u} = \mathcal{F}} \quad (114)$$

1.5.21 Følt (eller faktisk) gravitasjon på jorden, og momentumligningen på standard form

Målt (eller følt) tyngdeakselerasjon \mathbf{g}^* på den roterende jorden har to bidrag: Gravitasjonen som virker på en ikke-roterende jord $-\hat{\mathbf{z}}g$ (som vi har benyttet oss av frem til nå) og den utoverrettede virkningen fra sentrifugalakselerasjonen $-\boldsymbol{\Omega} \times (\boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{r})$.

På grunn av den utoverrettede sentrifugalakselerasjonen, som er størst ved på ekvator og avtar til null i polpunktene, er jorden noe bredere – rundt 21 km større radius – ved ekvator enn for en ikke roterende jord.

Velger vi vår vertikalretning slik at z -aksen står normalt på jordens faktiske overflate, forsvinner sentrifugalleddet siden virkningen da er inkludert i gravitasjonsakselerasjonen vi måler på jorden, \mathbf{g}^* .

Vi benytter g i stedet for \mathbf{g}^* heretter, underforstått at g i momentumligningen er gravitasjonen vi måler på vår roterende jord. Og vi bruker at z -retningen står normalt på den (svakt) deformerte jordoverflaten.

¹³Kan vises ved å skrive ut venstre side på komponentform, og derivere høyre side mhp. Ω .

Dette gir standard form for momentumligningen i et roterende koordinatsystem

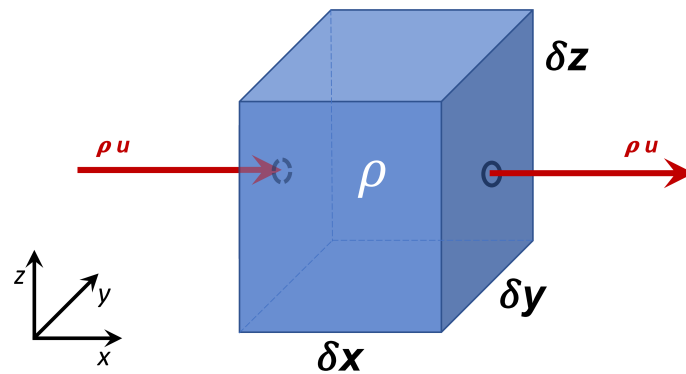
$$\boxed{\frac{D\mathbf{u}}{Dt} + \frac{1}{\rho}\nabla p + g\hat{\mathbf{z}} + f\hat{\mathbf{z}} \times \mathbf{u} = \mathcal{F}} \quad (115)$$

1.6 Kontinuitetsligningen (§6.3)

Prinsippet om bevaring av masse uttrykkes med *kontinuitetsligningen*. Siden masse er en skalar, gjelder samme form av kontinuitetsligningen i et ikke-roterende og roterende system. Sammen med momentumligningen i et roterende koordinatsystem, for eksempel som uttrykt med ligning (115), utgjør kontinuitetsligningen kjernen i å forstå bevegelsen i atmosfære og hav.

1.6.1 Utledning

Vi betrakter et væskeelement formet som en kube med senter i (x, y, z) og med sider δx , δy og δz , se figur 15. Vi antar at volumets sideflater ligger fast slik at δx , δy og δz ikke endrer seg i tid.



Figur 15: Et væskeelement formet som en kube med massetransport $\rho \mathbf{u} A = \rho(u, 0, 0) A$ inn gjennom venstre sideflate og ut gjennom høyre sideflate. Her er ρ partikkelens tetthet og $A = \delta y \delta z$ er arealet til flatene med massetransport.

En endring i væskepartikkelens masse er gitt av differansen av *massefluks* inn i og ut av væskeelementet. Massefluks er transport av masse gjennom et areal per tidsenhet, dvs. størrelsen

$$\rho \mathbf{u} A \quad (116)$$

Enhet for massefluks er kg/s.

Basert på figur 15 betrakter vi massefluks i x -retningen; tilsvarende betraktninger gjelder for massefluks i y - og z -retningene.

Volumet har masse

$$\rho \delta x \delta y \delta z \quad (117)$$

Tidsendring av masse i det materielle volumet

$$\frac{\partial}{\partial t} (\rho \delta x \delta y \delta z) = \frac{\partial \rho}{\partial t} \delta x \delta y \delta z \quad (118)$$

må balanseres av forskjellen mellom masse inn i og masse ut av volumet.

Massefluks inn i væskeelementet i posisjon $(x - \delta x/2, y, z, t)$ er gitt med x -komponenten av uttrykk (116):

$$[\rho u](x - \delta x/2, y, z, t) \delta y \delta z \quad (119)$$

Tilsvarende, massefluks ut av væskeelementet i posisjon $(x + \delta x/2, y, z, t)$ er gitt med

$$[\rho u](x + \delta x/2, y, z, t) \delta y \delta z \quad (120)$$

Endring av massefluks i x -retningen er da

$$[\rho u](x - \delta x/2, y, z, t) \delta y \delta z - [\rho u](x + \delta x/2, y, z, t) \delta y \delta z = -\frac{\partial(\rho u)}{\partial x} \delta x \delta y \delta z \quad (121)$$

I siste overgang er Taylor-rekkeutvikling til første orden benyttet, se uttrykk (642).

Tilsvarende uttrykk for endring av massetransport i y - og z -retningene gir:

$$-\frac{\partial(\rho v)}{\partial y} \delta x \delta y \delta z \quad (122)$$

$$-\frac{\partial(\rho w)}{\partial z} \delta x \delta y \delta z \quad (123)$$

Endring av masse i væskeelementet, uttrykk (118), er da bestemt av endring i massetransport i de tre koordinatretningene:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} \delta x \delta y \delta z = -\left(\frac{\partial(\rho u)}{\partial x} + \frac{\partial(\rho v)}{\partial y} + \frac{\partial(\rho w)}{\partial z}\right) \delta x \delta y \delta z \quad (124)$$

Vi kan her dividere på elementets volum $\delta x \delta y \delta z$, som gir

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} = -\left(\frac{\partial(\rho u)}{\partial x} + \frac{\partial(\rho v)}{\partial y} + \frac{\partial(\rho w)}{\partial z}\right) = -\nabla \cdot (\rho \mathbf{u}) \quad (125)$$

Standard form for kontinuitetsligningen skrives (oftest) på formen

$$\boxed{\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \mathbf{u}) = 0} \quad (126)$$

Kontinuitetsligningen (126) uttrykker at væskens tetthet ρ endres dersom det er en forskjell mellom massefluks inn i og ut av et væskeelement.

Strøm av masse inn i væskeelementet kalles *konvergens* mens strøm av masse ut av væskeelementet kalles *divergens*. Mer om dette i neste avsnitt.

1.6.2 Konvergens og divergens

Andre ledd i kontinuitetsligningen (126) er på formen

$$\nabla \cdot \mathbf{A} = \frac{\partial A_x}{\partial x} + \frac{\partial A_y}{\partial y} + \frac{\partial A_z}{\partial z} \quad (127)$$

hvor \mathbf{A} er en generell vektor. Uttrykket over kalles «divergensen til \mathbf{A} ».

Divergensen til \mathbf{A} , $\nabla \cdot \mathbf{A}$, er en skalar (et tall) og er det matematiske uttrykket som uttrykker om egenskapen til \mathbf{A} strømmer inn mot, eller bort fra, et punkt.

Fra kontinuitetsligningen (126), dersom vi flytter divergens-leddet på høyre side, ser vi at tettheten ρ øker med tiden t når $\nabla \cdot (\rho \mathbf{u}) < 0$ og at ρ avtar når $\nabla \cdot (\rho \mathbf{u}) > 0$. Følgelig uttrykker

$$\nabla \cdot \mathbf{A} \begin{cases} < 0 : & \text{konvergens} \\ > 0 : & \text{divergens} \end{cases} \quad (128)$$

av egenskapen til \mathbf{A} . Dette gjelder for enhver vektor \mathbf{A} .

1.6.3 Kontinuitetsligningen uttrykt med den totalderiverte av ρ

Kontinuitetsligningen (126) kan skrives på en alternativ form ved å bruke vektoridentiteten (566). Dette gir

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \rho \nabla \cdot \mathbf{u} + \mathbf{u} \cdot \nabla \rho = 0 \quad (129)$$

Det første og tredje leddet i (129) er identisk med den totalderiverte til tetthet ρ , ligning (16). Dette gir følgende, alternative form for kontinuitetsligningen:

$$\frac{D\rho}{Dt} + \rho \nabla \cdot \mathbf{u} = 0 \quad (130)$$

Ligningen over uttrykker at en væskepartikkels tetthet ρ , når vi følger med bevegelsen, kan kun endres dersom divergensen til hastighetsfeltet er forskjellig fra null.

1.6.4 Kontinuitetsligningen for inkompressible væsker

En *inkompressibel væske* er en væske med konstant tetthet, mens tettheten er fri til å endres i en *kompressibel væske*. Basert på dette er vann og sjøvann tilnærmet inkompressible væsker¹⁴, mens luft er en kompressibel væske.

For enhver inkompressibel væske vil, per definisjon, tettheten være bevart med bevegelsen, som er det samme som

$$D\rho/Dt = 0 \quad (131)$$

Dette betyr at kontinuitetsligningen (130) for en inkompressibel væske kan skrives på formen

$$\nabla \cdot \mathbf{u} = 0 \quad (132)$$

Ligning (132) uttrykker «divergensfri strøm», og vi bruker denne ligningen når vi omhandler dynamikken i havet. Skulle det for eksempel være konvergent, horisontal strøm i havets overflate, sier uttrykk (132) at da må det være en vertikal massetransport ned i havet slik at $\nabla \cdot \mathbf{u} = 0$. Dette er kjernen til den såklarte *Ekman-dynamikken* som vi kommer til i avsnitt 5.

Det er også mulig å omforme kontinuitetsligningen for luft (en kompressibel væske) til et uttrykk på formen til en divergensfri strøm (a la uttrykk 132). Dette kan gjøres ved å innføre trykk p , i stedet for vertikalt nivå z , som vertikal koordinat. Vi kommer tilbake til dette i neste kapittel.

¹⁴Merk at vi her bare snakker om (sjø)vannets tetthet kan endres på grunn av strømfeltet, ikke temperaturens og saltholdighetens påvirkning på tettheten.

2 Balansert strøm (§7)

Momentumligningen (115) og kontinuitetsligningen (130) danner fundamentet av koplede, partielle differensialligninger som beskriver bevegelsen i atmosfære og hav. Ligningene er kompliserte og kan ikke løses analytisk uten forenklinger.

For å kunne forenkle momentum- og kontinuitetsligningen, trenger vi å identifisere de viktigste bidragene til å beskrive den dynamikken vi er interessert i. I det følgende betrakter vi *fri, storskala bevegelse* i atmosfære og hav på *midlere breddegrader*.

Med *fri bevegelse* mener vi bevegelse som i liten grad er påvirket av friksjon. Det vil si at vi holder oss borte fra den nedre delen av atmosfæren, og den øvre del av havet og mot havbunnen. Når friksjonen er neglisjerbar kan vi sette $\mathcal{F} = \mathbf{0}$ i momentumligningen (115).

Med *storskala bevegelse* menes dynamikk som i hovedsak foregår i horisontalplanet, dvs. langs jordoverflaten. Dette gjelder bevegelse i atmosfæren med en typisk utstrekning på 500–1000 km og mer, og på 100 km og mer i havet.

Med *midlere breddegrader* menes at vi holder oss borte fra ekvator og polene. Ofte kan vi bruke at vi er på breddegrad $|\varphi| \approx 45^\circ$. I dette tilfellet er Coriolisparameteren $f = 1 \times 10^{-4} \text{ 1/s}$. I praksis kan vi være på alle breddegrader bortsatt helt nær ekvator hvor Coriolis-forenklingen i avsnitt 1.5.12 bryter sammen og hvor $|f| \approx 0$.

For at momentumligningen på form (115), uten friksjon, dvs.

$$\frac{D\mathbf{u}}{Dt} + \frac{1}{\rho}\nabla p + g\hat{\mathbf{z}} + f\hat{\mathbf{z}} \times \mathbf{u} = \mathbf{0} \quad (133)$$

skal gjelde, må de største (viktigste) leddene balansere hverandre. For å kunne vurdere dette, trenger vi informasjon fra observasjoner (empiri) eller antagelser basert på kunnskap om det systemet/den dynamikken vi studerer. En mye brukt metode til å vurdere størrelsen til de ulike leddene i f.eks. momentumligningen er *skalaanalyse*.

2.1 Skalaanalyse for fri, storskala bevegelse i atmosfære og hav (§7.1)

For et gitt problem eksisterer det ofte karakteristiske horisontale langdeskalaer \mathcal{L} (m), horisontale hastighetsendringer \mathcal{U} (m/s), tidsskalaer \mathcal{T} (s) og trykkendringer \mathcal{P} (Pa). Disse verdiene er oftest basert på observasjoner, men de kan også være utledet fra kunnskap om det systemet vi studerer.

Verdiene for disse karakteristiske størrelsene varierer om vi er i atmosfæren eller i havet.

Dersom vi ser på de horisontale x - og y -komponentene av momentumligningen (133) på midlere breddegrader, gir tabell 1 omtrentlige verdier for de fysiske størrelsene som inngår.

I tabellen over er følgende verdier brukt:

- Typisk endring av strømfart i havet er satt til 0.1 m/s og typisk endring av vindfart i atmosfæren er satt til 10 m/s. Dette er basert på observasjoner.
- Typisk utstrekning for stømsystemer i havet er satt til 1000 km (tenk på gyresirkulasjonen). Tilsvarende verdi (1000 km) er brukt for vindsystemer i atmosfæren, tenk på utstrekningen av lavtrykk.
- Siden fart = distanse/tid, har vi at \mathcal{T} går som \mathcal{L}/\mathcal{U} . Med oppgitte verdier for \mathcal{L} og \mathcal{U} , gir dette \mathcal{T} . Merk at $\mathcal{T}_{\text{hav}} = 10^7$ s tilsvarer 100 dager og $\mathcal{T}_{\text{atm}} = 10^5$ s tilsvarer 1 dag.

Tabell 1: Oversikt over typiske størrelser og verdier for fri, storskala bevegelse i atmosfære og hav på midlere breddegrader.

Fysisk størrelse	Karakteristisk størrelse	Kommentar	Typisk verdi		Enhet
			hav	atmosfære	
$\delta u, \delta v$	\mathcal{U}	(a)	10^{-1}	10	m/s
$\delta x, \delta y$	\mathcal{L}	(b)	10^6	10^6	m
δt	\mathcal{T}	(c)	10^7	10^5	s
δp	\mathcal{P}	(d)	10^4	10^3	Pa

Dette gir mening basert på typisk tid for horisontal havsirkulasjon og lav- og høytrykkenes varighet i et fast geografisk punkt.

- (d) For havet gir hydrostatisk ligning (55) at $\delta p = \rho g \delta z$. Her er $\rho \sim 1000 \text{ kg/m}^3$ og $g \sim 10 \text{ m/s}^2$. δz kan være typisk havnivåhelning på en avstand $\mathcal{L}_{\text{hav}} = 10^6 \text{ m}$, som er typisk 1 m (mer om variasjoner i havnivå senere). Dette gir $\mathcal{P}_{\text{hav}} \sim 10^4 \text{ Pa}$. For atmosfæren kan \mathcal{P} representere trykkendringen i et lavtrykk, som vi kan anta er én prosent av standard bakketrykk på 10^5 Pa , som gir $\mathcal{P}_{\text{atm}} \sim 10^3 \text{ Pa}$.

Basert på overstående kan vi nå estimere verdien til de ulike leddene for momentumligningens horisontalkomponenter. Dette gjøres ved å sette inn de karakteristiske verdiene fra tabell 1 i momentumligningens ledd som gitt i ligning (134), som igjen gir verdier som vist i tabell 2.

$$\underbrace{\frac{\partial \mathbf{u}_h}{\partial t}}_{\frac{\mathcal{U}}{\mathcal{T}}} + \underbrace{\mathbf{u}_h \cdot \nabla_h \mathbf{u}_h}_{\frac{\mathcal{U}^2}{\mathcal{L}}} + \underbrace{\frac{1}{\rho} \nabla_h p}_{\frac{\mathcal{P}}{\rho \mathcal{L}}} + \underbrace{f \hat{\mathbf{z}} \times \mathbf{u}_h}_{f \mathcal{U}} = \mathbf{0} \quad (134)$$

Tabell 2: Estimert verdi til momentumligningens ledd fra (134), vist med uthevet skrift, basert på tabell 1 og med parameterverdiene $\rho_{\text{atm}} \sim 1 \text{ kg/m}^3$, $\rho_{\text{hav}} \sim 1000 \text{ kg/m}^3$ og $f \sim 10^{-4} \text{ 1/s}$. Enhet til de fysiske leddene er m/s^2 .

Fra momentumligning (134):				
Fysisk ledd:	$\partial \mathbf{u}_h / \partial t$	$\mathbf{u}_h \cdot \nabla_h \mathbf{u}_h$	$(1/\rho) \nabla_h p$	$f \hat{\mathbf{z}} \times \mathbf{u}_h$
Skalerer som:	\mathcal{U}/\mathcal{T}	$\mathcal{U}^2/\mathcal{L}$	$\mathcal{P}/(\rho \mathcal{L})$	$f \mathcal{U}$
Innsatt verdier fra tabell 1:				
For atmosfære	$10/10^5$ $\sim \mathbf{10^{-4}}$	$10^2/10^6$ $\sim \mathbf{10^{-4}}$	$10^3/(1 \cdot 10^6)$ $\sim \mathbf{10^{-3}}$	$10^{-4} \cdot 10$ $\sim \mathbf{10^{-3}}$
For hav	$10^{-1}/10^7$ $\sim \mathbf{10^{-8}}$	$10^{-2}/10^6$ $\sim \mathbf{10^{-8}}$	$10^4/(10^3 \cdot 10^6)$ $\sim \mathbf{10^{-5}}$	$10^{-4} \cdot 10^{-1}$ $\sim \mathbf{10^{-5}}$

Kommentar 1 Siden vi har benyttet sammenhengen $\mathcal{T} = \mathcal{L}/\mathcal{U}$, vil de to leddene for den totalderiverte, $\partial \mathbf{u}_h / \partial t$ og $\mathbf{u}_h \cdot \nabla_h \mathbf{u}_h$, ha lik verdi basert på skalaanalysen. En slik sammenheng gjelder generelt for storskala bevegelse i atmosfære og hav.

Kommentar 2 Ved å sammenligne størrelsen til leddene vist med uthevet skrift i tabell 2, ser vi at

$$|\text{Coriolis-leddet}| \quad \text{er større enn} \quad |\text{den totalderiverte}|$$

Forskjellen er stor for havet, med typisk verdi for de to leddene på hhv. 10^{-5} m/s^2 og 10^{-8} m/s^2 .

For atmosfæren er differansen mellom de to leddene mindre, men Coriolis-leddet er fremdeles en størrelsesorden større enn verdi til den totalderiverte.

Basert på dette kan vi konkludere at for fri, storskala, horisontal bevegelse i atmosfære og hav er

$$|\text{Coriolis-ledd}| \gg |\text{totalderivert}|$$

som er det samme som

$$|\text{Coriolis-ledd}| \gg |\text{adveksjonsledd}| \quad (135)$$

2.1.1 Rossbytalet

I væskedynamikken er det vanlig å oppgi egenskaper til væsken og/eller væskens dynamikk basert på karakteristiske, dimensjonsløse størrelser. En slik størrelse er Rossbytalet R_0 .

Rossbytalet er oppkalt etter den svenske oseanografen Carl-Gustav Arvid Rossby, og er definert som størrelsesforholdet mellom adveksjon- og Coriolis-leddene i momentumligningen:

$$R_0 \stackrel{\text{def}}{=} \frac{|\text{adveksjonsledd}|}{|\text{Coriolis-ledd}|} \quad (136)$$

Fra den horisontale momentumligningen (134) har vi at adveksjonsleddet går som

$$\mathcal{U}^2 / \mathcal{L} \quad (137)$$

og Coriolis-leddet går som

$$f \mathcal{U} \quad (138)$$

Innsatt i (136) gir dette

$$\boxed{R_0 = \frac{\mathcal{U}}{f \mathcal{L}}} \quad (139)$$

Kommentar Selv om Rossbytalet R_0 er definert som forholdet mellom adveksjon- og Coriolisleddenes absoluttverdi, er dette forholdet det samme som forholdet mellom den totalderiverte og Coriolisleddenes absoluttverdi (siden de to leddene i den totalderiverte har samme verdi, se kommentar 1 i avsnittet over). Dette betyr at $R_0 \ll 1$ uttrykker at Coriolis-leddet er mye større enn begge leddene som utgjør den totalderiverte av \mathbf{u} .

2.1.2 Geostrofisk (kraft)balanse

Når $R_0 \ll 1$ og når vi ser bort fra friksjon ($\mathcal{F} = \mathbf{0}$), må momentumligningens trykk- og Coriolis-ledd (omtrentlig) balanseres i horisontalretningen. Fra momentumligningen (134) har vi da

$$\frac{1}{\rho} \nabla_h p + f \hat{\mathbf{z}} \times \mathbf{u}_h \approx \mathbf{0} \quad (140)$$

Når trykk- og Coriolis-leddene balanserer hverandre eksakt, sier vi at vi har *geostrofisk balanse* som gir *geostrofisk strøm*, \mathbf{u}_g . Når vi har geostrofisk balanse kan vi innføre \mathbf{u}_g og likhetstegn i uttrykk (140), som gir

$$\boxed{\frac{1}{\rho} \nabla p + f \hat{\mathbf{z}} \times \mathbf{u}_g = \mathbf{0}} \quad (141)$$

I uttrykket over har vi sløymet h-en på trykkgradienten da det er underforstått at vi betrakter horisontal bevegelse.

Geostrofisk strøm som definert med uttrykk (141) er en teoretisk størrelse siden det generelt vil virke andre krefter, som friksjon. På tross av dette beskriver geostrofisk strøm grunnleggende egenskaper til sirkulasjonen i atmosfære og hav. Senere skal vi bl.a. inkludere virkningen av friksjon (som gir *ageostrofisk strøm*).

Generelt gjelder geostrofisk kraftbalanse når følgende betingelser er oppfylte:

- $R_0 \ll 1$
- Friksjonsfri strøm

Fra uttrykket for Rossbytalet (139) ser vi at

$$|R_0| \rightarrow \infty \quad \text{når} \quad |f| \rightarrow 0 \quad (142)$$

slik at geostrofisk strøm ikke eksisterer på eller helt inn mot ekvator. I praksis gjelder geostrofisk balanse for storskala bevegelse noen fåtalls breddegrader fra ekvator (typisk $|\varphi| > 3$ til 5°).

Geostrofisk strøm er horisontal strøm Merk at geostrofisk strøm er utledet fra den horisontale momentumligningen. Geostrofisk strøm $\mathbf{u}_g = (u_g, v_g)$ er derfor todimensjonal.

2.1.3 Geostrofisk strøm \mathbf{u}_g (§7.1)

Uttrykk for \mathbf{u}_g følger fra ligningen for geostrofisk balanse (141) ved å dividere med f og krysse det resulterende uttrykket fra venstre med enhetsvektoren $\hat{\mathbf{z}}$:

$$\hat{\mathbf{z}} \times \left| \hat{\mathbf{z}} \times \mathbf{u}_g = -\frac{1}{f\rho} \nabla p \right. \quad (143)$$

Dette gir

$$-\mathbf{u}_g = -\frac{1}{f\rho} \hat{\mathbf{z}} \times \nabla p \quad (144)$$

eller

$$\boxed{\mathbf{u}_g = \frac{1}{f\rho} \hat{\mathbf{z}} \times \nabla p} \quad (145)$$

Ligning (145) er uttrykket for geostrofisk strøm.

Overgangen mellom uttrykk (143) og (144) kan vises ved å skrive ut det doble kryssproduktet $\hat{\mathbf{z}} \times (\hat{\mathbf{z}} \times \mathbf{u}_g)$ i (143), eller ved bruk av høyrehåndsregelen.

Utrekning av det doble kryssproduktet Det indre kryssproduktet gir

$$\hat{\mathbf{z}} \times \mathbf{u}_g = \begin{vmatrix} x & y & z \\ 0 & 0 & 1 \\ u_g & v_g & 0 \end{vmatrix} = (-v_g, u_g, 0) \quad (146)$$

Det doble kryssproduktet gir da

$$\hat{\mathbf{z}} \times (\hat{\mathbf{z}} \times \mathbf{u}_g) = \begin{vmatrix} x & y & z \\ 0 & 0 & 1 \\ -v_g & u_g & 0 \end{vmatrix} = (-u_g, -v_g, 0) = -\mathbf{u}_g \quad (147)$$

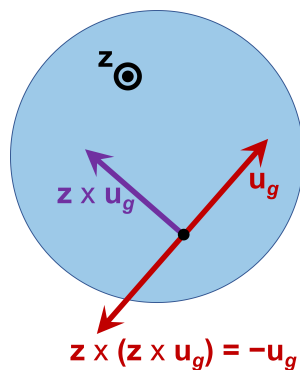
Altså er

$$\hat{\mathbf{z}} \times (\hat{\mathbf{z}} \times \mathbf{u}_g) = -\mathbf{u}_g \quad (148)$$

Høyrehåndsregelen anvendt på det doble kryssproduktet I stedet for å regne ut kryssproduktet som gjort over, er det (mye) raskere å utføre det doble kryssproduktet $\hat{\mathbf{z}} \times (\hat{\mathbf{z}} \times \mathbf{u}_g)$ ved hjelp av høyrehåndsregelen.

For det første vet vi fra definisjonen av kryssproduktet at $|\hat{\mathbf{z}} \times (\hat{\mathbf{z}} \times \mathbf{u}_g)| = |\mathbf{u}_g|$. Dernest vet vi at $(\hat{\mathbf{z}} \times \mathbf{u}_g) \perp \mathbf{u}_g$, slik at $\hat{\mathbf{z}} \times (\hat{\mathbf{z}} \times \mathbf{u}_g) \parallel \mathbf{u}_g$. Vi står derfor igjen med å bestemme om det doble kryssproduktet er rettet med eller mot \mathbf{u}_g .

Det siste kan vi finne ut ved å starte med vektoren \mathbf{u}_g som i figur 16, og deretter bruke høyrehåndsregelen for å bestemme retningen til $\hat{\mathbf{z}} \times \mathbf{u}_g$ og $\hat{\mathbf{z}} \times (\hat{\mathbf{z}} \times \mathbf{u}_g)$.



Figur 16: Høyrehåndsregelen anvendt på $\hat{\mathbf{z}} \times \mathbf{u}_g$, deretter på $\hat{\mathbf{z}} \times (\hat{\mathbf{z}} \times \mathbf{u}_g)$. Enhetsvektoren $\hat{\mathbf{z}}$ er rettet mot oss slik at vi ser ned på den blå disken.

Huskeregul 1 Se avsnitt 1.5.13!

Huskeregul 2 For enhetsvektoren $\hat{\mathbf{z}}$ og en vilkårlig to- eller tredimensjonal vektor \mathbf{A} gjelder alltid

$$\hat{\mathbf{z}} \times (\hat{\mathbf{z}} \times \mathbf{A}) = -\mathbf{A} \quad (149)$$

2.1.4 Geostrofisk strøm på komponentform

Ved å skrive ut kryssproduktet i uttrykket for geostrofisk strøm (145), får vi

$$u_g = -\frac{1}{f\rho} \frac{\partial p}{\partial y} \quad (150)$$

$$v_g = \frac{1}{f\rho} \frac{\partial p}{\partial x} \quad (151)$$

Utledningen følger (igjen) fra huskeregelen i avsnitt 1.5.13!

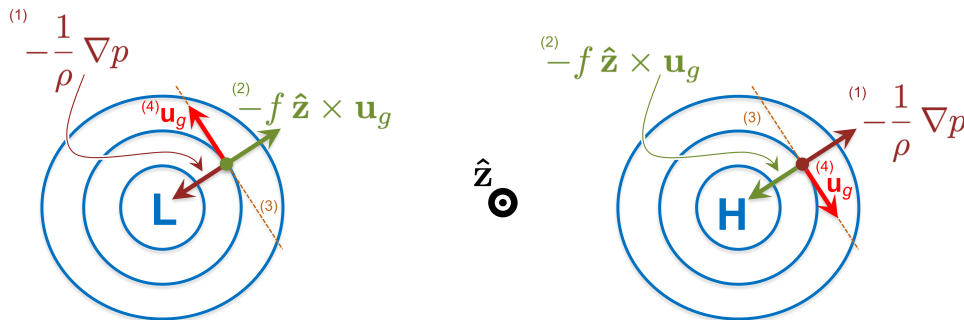
2.1.5 Geostrofisk kraftbalanse for lav- og høytrykk

Sammenhengen mellom trykkgradientkraft per enhetsmasse, Corioliskraft per enhetsmasse og geostrofisk strøm kan finnes ved å analysere geostrofisk kraftbalanse fra ligning (141), men med negative fortegn siden dette er fortegnene til de fysiske kreftene som virker:

$$-\frac{1}{\rho} \nabla p - f \hat{\mathbf{z}} \times \mathbf{u}_g = \mathbf{0} \quad (152)$$

Figur 17 viser et lav- og høytrykk. Vi antar vi er på den nordlige halvkule slik at $f > 0$. Ligning (153) gir da, steg for steg (se nummerering i figuren):

- (1) Trykkgradientkraft per enhetsmasse $-(1/\rho) \nabla p$ er rettet mot lavere trykk (burgunder farge).
- (2) Fra (153) følger det at Coriolis-leddet $-f \hat{\mathbf{z}} \times \mathbf{u}_g$ må være like stort men motsatt rettet av trykkgradientleddet (grønn farge).
- (3) Coriolis-leddet medfører at $\mathbf{u}_g \perp \hat{\mathbf{z}} \times \mathbf{u}_g$ (stiplet, orange linje).
- (4) Høyrehåndsregelen anvendt på $-f \hat{\mathbf{z}} \times \mathbf{u}_g$, med $f > 0$, betyr at geostrofisk strøm \mathbf{u}_g er rettet *mot* klokken rundt et lavtrykk, og *med* klokken rundt et høytrykk. Dette gjelder alltid.



Figur 17: Illustrasjon av geostrofisk kraftbalanse for et lavtrykk (venstre) og høytrykk (høyre) på den nordlige halvkule. De blå konturene representerer isobarer ($p = \text{konst.}$). Vi ser ned på lav- og høytrykkene, slik at vertikal enhetsvektor $\hat{\mathbf{z}}$ er rettet mot oss.

Merk:

- Ved geostrofisk balanse følger vind/strøm konturer med konstant trykk $p = \text{konst.}$, kalt *isobarer*, med lavt trykk til venstre for bevegelsen på den nordlige halvkule.

- Det er balansen mellom $-(1/\rho)\nabla p$ og $-f\hat{\mathbf{z}} \times \mathbf{u}_g$ som gjør at lavtrykkene ikke kollapser på grunn av den innoverrettede trykkgradientkraften.
- Skulle kun Coriolis- og trykkgradientkreftene virke, ville sirkulasjonen være rettet rundt lav- og høytrykk til evig tid. *Friksjon* medfører (svak) avbøying mot lavere trykk ved bakken, slik at bakkenær luft strømmer inn mot sentrum av et lavtrykk og ut fra sentrum av et høytrykk (kommer til dette senere).
- På den sørlige halvkule er $f < 0$, slik at rotasjonsjonen er motsatt rettet sammenlignet med rotasjonen på den nordlige halvkule.
- Et lavtrykk kalles også for en *syklon*, og sirkulasjonen rundt et lavtrykk kalles gjerne *syklonsk sirkulasjon*.
- Et høytrykk kalles også for en *antisyklon*, og sirkulasjonen rundt et høytrykk kalles gjerne *antisyklonsk sirkulasjon*.

2.1.6 Eksempel, geostrofisk balanse

Oppgave 4, side 136 i Marshall & Plumb.

Kommer...

2.1.7 Varierende strømstyrke (§7.1)

I ren geostrofisk strøm er isobarene materielle linjer/flater; væskepartiklene kan *ikke* krysse isobarene/isobarflatene. Dette følger fra geostrofituttrykket

$$\mathbf{u}_g = \frac{1}{f\rho} \hat{\mathbf{z}} \times \nabla p \quad (153)$$

Fra definisjonen av kryssproduktet er $\mathbf{u}_g \perp \nabla p$, som er det samme som at \mathbf{u}_g er rettet langs isobarene ($p = \text{konst.}$), eller

$$\boxed{\mathbf{u}_g \parallel p = \text{konst.}} \quad (154)$$

Absoluttverdien av ligning (153) er

$$|\mathbf{u}_g| = \frac{1}{|f|\rho} |\nabla p| \quad (155)$$

som alternativt kan skrives på formen

$$|\mathbf{u}_g| = \frac{1}{|f|\rho} \frac{\delta p}{\delta s} \quad (156)$$

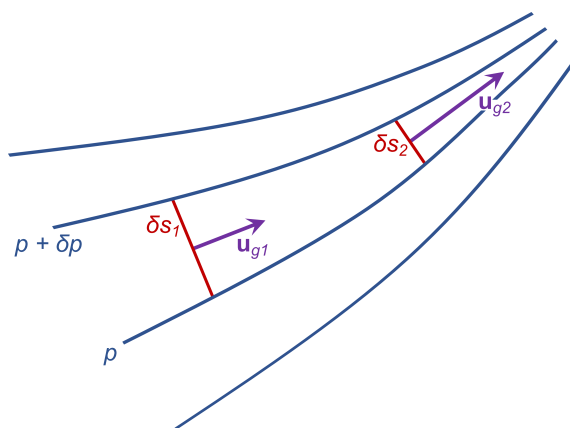
I uttrykket over er δp (Pa) trykkendring og δs (m) avstanden som trykkendringen gjelder for.

Figur 18 viser en situasjon med konvergerende isobarer. I posisjon 1 er geostrofisk fart gitt ved

$$|\mathbf{u}_{g1}| = \frac{1}{|f|\rho} \frac{\delta p}{\delta s_1} \quad (157)$$

Tilsvarende, ved posisjon 2 er geostrofisk fart

$$|\mathbf{u}_{g2}| = \frac{1}{|f|\rho} \frac{\delta p}{\delta s_2} \quad (158)$$



Figur 18: Illustrasjon av geostrofisk strøm \mathbf{u}_g i et felt med konvergerende isobarer (blå kurver). To posisjoner er merket (posisjon 1 og 2), hvor avstanden mellom isobarene er hhv. δs_1 og δs_2 , hvor $\delta s_1 > \delta s_2$.

Siden væskepartiklene i geostrofisk strøm ikke kan krysse isobarene, må det nødvendigvis være samme massetransport i posisjon 1 og 2. Uttrykkene (157) og (158) gir da

$$|\mathbf{u}_{g1}| \delta s_1 = |\mathbf{u}_{g2}| \delta s_2 \quad (159)$$

Fra figuren er $\delta s_1 > \delta s_2$, slik at

$$|\mathbf{u}_{g1}| < |\mathbf{u}_{g2}| \quad (160)$$

eller, fra (157) og (158),

$$\boxed{|\mathbf{u}_g| \propto \frac{1}{\delta s}} \quad (161)$$

Dette betyr at geostrofisk fart varierer invers med avstanden mellom isobarene. Som igjen betyr at nærliggende isobarer gir høy geostrofisk fart. Orienteringen til geostrofisk strøm er, som uttrykk (154) sier, alltid rettet langs isobarene.

2.2 Kontinuitetsligningen for geostrofisk strøm

Fra avsnittene 1.6.3 og 1.6.4 har vi at kontinuitetsligningen for et generelt hastighetsfelt \mathbf{u} kan skrives på formen

$$\frac{D\rho}{Dt} + \rho \nabla \cdot \mathbf{u} = 0 \quad (162)$$

og at kontinuitetsligningen for en inkompressibel væske er

$$\nabla \cdot \mathbf{u} = 0 \quad (163)$$

Vi skal nå se på kontinuitetsligningen når $\mathbf{u} = \mathbf{u}_g$ for en inkompressibel og kompressibel væske.

2.2.1 Kontinuitetsligningen for en inkompressibel væske, geostrofisk strøm

Dersom væsken er inkompressibel, som vann/sjøvann, følger kontinuitetsligningen fra (163) med $\mathbf{u} = \mathbf{u}_g$:

$$\nabla \cdot \mathbf{u}_g = \frac{\partial u_g}{\partial x} + \frac{\partial v_g}{\partial y} \quad (164)$$

$$= \frac{\partial}{\partial x} \left(-\frac{1}{f\rho} \frac{\partial p}{\partial y} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{1}{f\rho} \frac{\partial p}{\partial x} \right) \quad (165)$$

$$= -\frac{1}{f\rho} \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial p}{\partial y} \right) + \frac{1}{f\rho} \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial p}{\partial x} \right) \quad (166)$$

$$= \frac{1}{f\rho} \left(-\frac{\partial^2 p}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 p}{\partial x \partial y} \right) \quad (167)$$

$$= 0 \quad (168)$$

Kommentarer til utledningen over:

Overgang (165): Benytter geostrofisk strøm på komponentform fra avsnitt 2.1.4.

Overgang (166): Benytter at $\rho = \text{konst.}$ for en inkompressibel væske. Samt at $f = \text{konst.}$ i x -retningen (gjelder alltid) og at f varierer lite i y -retningen. Det siste er ok for dynamiske systemer/variasjoner med en meridional utstrekning på mindre enn noen 1000 km.

Overgang (167): Benytter at derivasjonsrekkefølgen alltid kan byttes om for en glatt (dvs. kontinuerlig deriverbar) funksjon, i dette tilfellet trykk p .

Resultatet $\nabla \cdot \mathbf{u}_g = 0$ sier at for en inkompressibel væske er geostrofisk strøm ikke-divergent. Dette betyr at det ikke er kilder eller sluk for strømmen.

Det siste betyr at det enten at det ikke er vertikal strøm, eller at vertikal strøm må være konstant slik at det i vertikalen strømmer like mye væske inn som ut av et kontrollvolum. Mer om dette i neste avsnitt.

2.2.2 Inkompressibel væske, geostrofisk strøm, vertikal komponent

Geostrofisk strøm \mathbf{u}_g er, per definisjon, en horisontal strøm. Finnes det en vertikal strømkomponent w_g , knyttet til \mathbf{u}_g ?

Vi kan se på dette ved å inkludere en tredje (vertikal) komponent slik at $\mathbf{u}_g = (u_g, v_g, w_g)$. Her er u_g og v_g de geostrofiske komponentene som vi har utledet og analysert over.

Den tre-dimensjonale formen av kontinuitetsligningen for en inkompressibel væske, ligning (163), gir

$$\frac{\partial u_g}{\partial x} + \frac{\partial v_g}{\partial y} + \frac{\partial w_g}{\partial z} = 0 \quad (169)$$

Den horisontale divergensen i uttrykket over er lik null (avsnitt 2.2.1), som medfører

$$\frac{\partial w_g}{\partial z} = 0 \quad \text{eller} \quad w_g = \text{konst.} \quad (170)$$

Geostrofisk strøm for en inkompressibel væske kan ikke ha et vertikalt hastighets-skjær. Er $w_g = 0$ et sted i væsken (f.eks. på bunnen av havet), vil $w_g = 0$ over alt.

Resultatet i ramme er hovedessensen et av de mest sentrale resultatene i teorien om roterende, inkompressible væsker, først demonstrert av den britiske fluiddynamikeren Joseph Proudman i 1915 og noe senere av Geoffrey Ingram Taylor (beskrevet i en publikasjon i 1921). Resultatet kalles *Taylor-Proudman teoremet*. Mer om dette senere.

2.3 Introduksjon av trykk-koordinater og geostrofisk strøm på geopotensialflater (§7.1.1)

Vi har til nå sett på egenskaper til en væske med konstant høyde, $z = \text{konst.}$, eller det som gjerne kalles en *nivåflate*.

Egenskaper til luft (temperatur, fuktighet, vindhastighet, etc.) blir gjerne målt som funksjon av trykk. Dette gir luftens egenskaper på flater med konstant trykk, $p = \text{konst.}$, eller *isobarflater*.

På tilsvarende måte som for en inkompressibel væske, kan kontinuitetsligningen for en kompressibel væske (som luft) skrives på formen $\nabla \cdot \mathbf{u} = 0$. Dette kan gjøres ved å beskrive luftens egenskaper/bevegelse på isobarflater, altså at vi erstatter vertikal koordinat fra å være høyde z til trykk p .

Denne (kompliserende) generaliseringen er nyttig da den letter den fysiske forståelsen og tolkningen av sirkulasjonen i atmosfæren.

Oppgaven nå er å søke en variant av geostrifekomponentene, se avsnitt 2.1.4,

$$u_g = -\frac{1}{f\rho} \frac{\partial p}{\partial y} \quad \text{og} \quad v_g = \frac{1}{f\rho} \frac{\partial p}{\partial x} \quad (171)$$

på en flate med konstant trykk, en isobarflate.

Som (nesten) alltid når vi har et problem som inkluderer *vertikal* retning benytter vi hydrostatisk tilnærming (55) til denne transformasjonen.

Vi betrakter først hvordan $\partial p / \partial x$ kan skrives for en fast høyde z . Fra figur 19 følger det at

$$\left. \frac{\partial p}{\partial x} \right|_z = \left. \frac{p_B - p_A}{\delta x} \right|_z \quad (172)$$

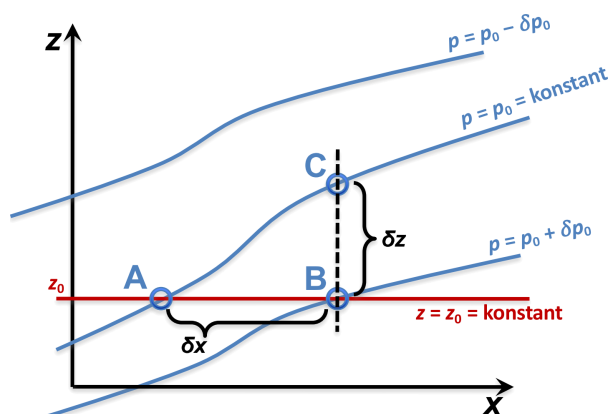
hvor p_A, p_B er trykket evaluert i punktene A og B, og subskrift z betegner at derivasjonen utføres langs linjen $z = \text{konst.}$ Siden $p_A = p_C$, følger det at

$$\left. \frac{\partial p}{\partial x} \right|_z = \left. \frac{p_B - p_C}{\delta x} \right|_p \quad (173)$$

whor subskrift p betegner at vi har benyttet at $p = \text{konst.}$ i siste overgang.

Venstre side av den hydrostatiske ligningen

$$\frac{\partial p}{\partial z} = -\rho g \quad (174)$$



Figur 19: Illustrasjon på overgang mellom z - og p -koordinater. Langs de blå konturlinjene er trykket $p = \text{konst.}$, med $\delta p > 0$. Langs den horisontale røde linjen er $z = \text{konst.}$

kan uttrykkes

$$\frac{p_C - p_B}{\delta z} \quad (175)$$

som gir at

$$p_C - p_B = -\rho g \delta z \quad (176)$$

Uttrykk (176) innsatt i (173) gir

$$\left. \frac{\partial p}{\partial x} \right|_z = \rho g \left. \frac{\delta z}{\delta x} \right|_p \quad (177)$$

For små $\delta x, \delta z$, følger det at

$$\left. \frac{\partial p}{\partial x} \right|_z = \rho g \left. \frac{\partial z}{\partial x} \right|_p \quad (178)$$

Tilsvarende for $\partial/\partial y$ gir

$$\left. \frac{\partial p}{\partial y} \right|_z = \rho g \left. \frac{\partial z}{\partial y} \right|_p \quad (179)$$

Dette betyr at den geostrofiske ligningen kan uttrykkes i *trykk-koordinater* som

$$\mathbf{u}_g = \frac{g}{f} \hat{\mathbf{z}}_p \times \nabla_p z \quad (180)$$

hvor $\hat{\mathbf{z}}_p$ er enhetsvektor normalt og rettet utover på isobarflaten, tilsvarende enhetsvektoren $\hat{\mathbf{z}}$ i nivåkoordinater.

På komponentform gir dette

$$u_g = -\frac{g}{f} \left(\frac{\partial z}{\partial y} \right)_p \quad (181)$$

$$v_g = \frac{g}{f} \left(\frac{\partial z}{\partial x} \right)_p \quad (182)$$

Merk følgende

Tettheten ρ inngår ikke i uttrykkene over. Sammenligner vi med geostrofisk ligning i z -koordinat (avsnittene 2.1.3 og 2.1.4), ser vi at faktoren $1/g$ nå spiller rollen som «tetthet» i geostrofisk ligning i p -koordinat.

Derivasjonen skjer på flater med konstant trykk. Slike flater blir gjerne kalt *geopotensialflater*.

Opphavet til drivkraften er nå høydeforskjellen z til flater med $p = \text{konst.}$

Stor høydeforskjell i x - og/eller y -retningene gir stor hastighet.

Huskeregul Som for geostrofisk strøm uttrykt med nivåkoordinat (z -koordinat) kan vi se på høyden til en geopotensialflate som høydekoter på et kart. Trykkgradientkraften, nå uttrykt som gradienten til geopotensialflaten, er rettet nedover hvor geopotensialflaten er brattest. Dette gir *alltid* avbøying til høyre på den nordlige halvkule (og til venstre på den sørlige halvkule). Analyse av geostrofisk strøm basert på geopotensialflater er derfor identisk med analyse av geostrofisk strøm basert på isobarflater.

2.3.1 Alternativ utledning av geostrofisk strøm i trykkoordinater

Tar først utgangspunkt i x -komponenten av geostrofisk strøm i nivåkoordinater

$$u_g = -\frac{1}{f\rho} \frac{\partial p}{\partial y} \quad (183)$$

Konstant trykk på en horisontal flate med høyde $z = z(x, y)$ kan uttrykkes som

$$p(x, y, z(x, y)) = C \quad (184)$$

hvor C er en konstant.

Den deriverte av (183) mhp. y , ved bruk av kjerneregelen, gir

$$\frac{\partial p}{\partial y} + \frac{\partial p}{\partial z} \frac{\partial z}{\partial y} \Big|_p = 0 \quad (185)$$

Subskrift p viser at sammenhengen gjelder på en flate z med konstant trykk, se (184).

Hydrostatisk tilnærming $\partial p/\partial z = -\rho g$ innsatt i uttrykket over gir

$$\frac{\partial p}{\partial y} = \rho g \frac{\partial z}{\partial y} \Big|_p \quad (186)$$

Uttrykk (186) innsatt i (183) gir

$$u_g = -\frac{g}{f} \frac{\partial z}{\partial y} \Big|_p \quad (187)$$

Tilsvarende utledning gjelder for y -komponenten av geostrofisk strøm, som gir

$$v_g = \frac{g}{f} \frac{\partial z}{\partial x} \Big|_p \quad (188)$$

2.3.2 Kontinuitetsligningen for en kompressibel væske, geostrofisk strøm

På tilsvarende måte som for en inkompressibel væske, kan vi nå se på divergensen til geostrofisk strøm for en kompressibel væske uttrykt i trykk-koordinater. Komponentene (181) og (182) gir:

$$\nabla_p \cdot \mathbf{u}_g = \left. \frac{\partial u_g}{\partial x} \right|_p + \left. \frac{\partial v_g}{\partial y} \right|_p \quad (189)$$

$$= \frac{\partial}{\partial x} \left(-\frac{g}{f} \frac{\partial p}{\partial y} \right)_p + \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{g}{f} \frac{\partial p}{\partial x} \right)_p \quad (190)$$

$$= 0 \quad (191)$$

I overgang (190) har vi benyttet at $\partial f / \partial y$ er liten, som er ok for problemer med en meridional utstrekning på opptil noen 1000 km. Denne antagelsen er identisk med den som ble benyttet for kontinuitetsligningen for en inkompressibel væske, se avsnitt 2.2.1.

Med antagelsen over har en kompressibel væske ikke-divergent strøm på en flate med konstant trykk, dvs. at det er ingen – eller konstant – hastighet $\perp \hat{\mathbf{z}}$. Sirkulasjonen i atmosfæren foregår med andre ord, i all hovedsak, på geoponesialflater (dvs. flater med konstant trykk p).

2.4 Valg av geostrofisk uttrykk

To uttrykk for geostrofisk strøm er utledet, et med høyde $z = \text{konst.}$ (145) og et med trykk $p = \text{konst.}$ (180) som vertikal koordinat:

$$\mathbf{u}_{g,z} = \frac{1}{f\rho} \hat{\mathbf{z}} \times \nabla p \quad (192)$$

og

$$\mathbf{u}_{g,p} = \frac{g}{f} \hat{\mathbf{z}}_p \times \nabla_p z \quad (193)$$

Merk at

$$\mathbf{u}_{g,z} = \mathbf{u}_{g,p} \quad (194)$$

slik at begge ligningene kan brukes om hverandre.

Det er dog en vesentlig forskjell. For en inkompressibel væske gjelder (fra avsnitt 2.2.1)

$$\nabla_z \cdot \mathbf{u}_{g,z} = 0 \quad (195)$$

og for en kompressibel væske gjelder (fra avsnitt 2.3.2)

$$\nabla_p \cdot \mathbf{u}_{g,p} = 0 \quad (196)$$

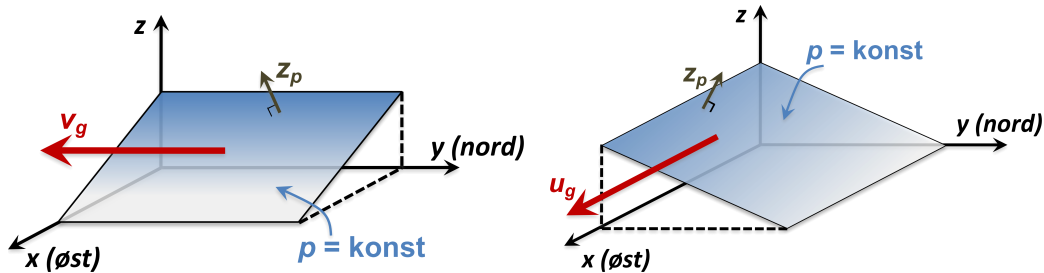
Uttrykkene over sier at bevegelsen til en inkompressibel væske foregår (primært) på nivåflater mens bevegelsen i en kompressibel væske foregår (primært) på isobarfalter.

Av denne årsak er det *hensiktsmessig* å bruke uttrykket for geostrofisk strøm på formen $\mathbf{u}_{g,z}$ for vann/sjøvann (dvs. havet) og $\mathbf{u}_{g,p}$ for luft (dvs. atmosfæren).

2.5 Tolkning av geostrofisk balanse i trykk-koordinater

2.5.1 $(\partial z/\partial x)_p = \text{konst} < 0$, $(\partial z/\partial y)_p = 0$ og $f > 0$

I dette tilfellet er vi på den nordlige halvkule og isobarflaten heller nedover mot øst, se venstre del av figur 20. Fra (181) og (182) følger det at $u_g = 0$ og $v_g < 0$, det vil si at den geostrofiske vinden har en sørlig komponent (i negativ y -retning).



Figur 20: Illustrasjon av $(\partial z/\partial x)_p$ og $(\partial z/\partial y)_p$ i det geostrofiske uttrykket (180) på den nordlige halvkule ($f > 0$). \mathbf{z}_p betegner enhetsvektoren normalt på isobarflatene.

2.5.2 $(\partial z/\partial x)_p = 0$, $(\partial z/\partial y)_p = \text{konst} < 0$ og $f > 0$

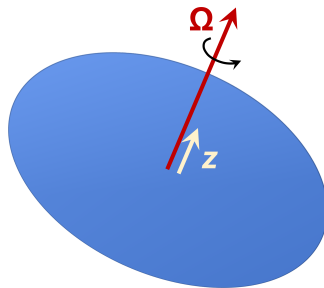
Vi er på den nordlige halvkule og isobarflaten heller nedover mot nord, se høyre del av figur 20. Fra (181) og (182) følger det at $u_g > 0$ og $v_g = 0$, det vil si at den geostrofiske vinden har en østlig komponent (i positiv x -retning).

2.5.3 Eksempel, en synoptisk vær-situasjon, 23. februar 2009

Kommer...

2.6 Taylor-Proudman teoremet på en roterende disk, inkompressibel væske (§7.2)

Vi betrakter en roterende disk, som et roterende bord, slik at $\boldsymbol{\Omega} = \hat{\mathbf{z}} \Omega$ som illustrert i figur 21. Taylor-Proudman teoremet på en kule kommer vi tilbake til.



Figur 21: Illustrasjon av en roterende disk med rotasjonsvektor $\boldsymbol{\Omega}$ og utoverrettet enhetsvektor $\hat{\mathbf{z}}$.

Spørsmålet er som følger: Varierer geostrofisk strøm i z -retningen når vi antar en inkompressibel væske ($\rho = \text{konst.}$) og at Coriolis-parameteren f varierer lite i meridional retning?

Vi ser da på den vertikaldrivererte av geostrofisk strøm i nivåkoordinat (fra avsnitt 2.1.4):

$$\frac{\partial u_g}{\partial z} = \frac{\partial}{\partial z} \left(-\frac{1}{f\rho} \frac{\partial p}{\partial y} \right) \quad (197)$$

$$= -\frac{1}{f\rho} \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial p}{\partial z} \right) \quad (198)$$

$$= -\frac{1}{f\rho} \frac{\partial}{\partial y} (-\rho g) \quad (199)$$

$$= 0 \quad (200)$$

I overgang (198) har vi benyttet $\rho, f = \text{konst.}$ og at p er kontinuerlig deriverbar, i overgang (199) er hydrostatisk tilnærming (55) benyttet.

Tilsvarende får vi at

$$\frac{\partial v_g}{\partial z} = 0 \quad (201)$$

For en inkompressibel væske på en roterende disk – og når vi kan se bort fra variasjoner av f i meridional retning – kan ikke geostrofisk strøm variere i retning Ω :

$$\frac{\partial u_g}{\partial z_\Omega} = \frac{\partial v_g}{\partial z_\Omega} = 0 \quad (202)$$

hvor z_Ω angir retningen til Ω . Dette er Taylor-Proudman teoremet i to dimensjoner.

2.6.1 Taylor-Proudman teoremet på en roterende disk, kompressibel væske

For en kompressibel væske som luft kan vi bruke geostrofisk strøm uttrykt i trykk-koordinat, se avsnitt 2.3, og ellers gjennomføre utledningen som i avsnittet over. Igjen får vi at

$$\frac{\partial u_g}{\partial z_\Omega} = \frac{\partial v_g}{\partial z_\Omega} = 0 \quad (203)$$

Altså ingen variasjoner av geostrofisk strøm i retning til rotasjonsvektoren Ω .

2.6.2 Taylor-Proudman teoremet – et paradoks

Taylor-Proudman teoremet gjelder også på en kule (vil komme til dette); dvs. at det ikke er vertikalt hastighetsskjær i et roterende system i retning til rotasjonsvektoren Ω . *Samtidig observerer vi hastighetsskjær i atmosfære og hav.*

Forklaringen på dette er at Taylor-Proudman teoremet bare gjelder for $\rho = \text{konst.}$ (inkompressibel væske), eller på geopotensialflater for en kompressibel væske.

Når tettheten ρ varierer *horisontalt* får vi at *vertikal* hastighet endres. Dette kalles *termalvind*. Jetstrømmene i atmosfæren er eksempler på termalvinder, drevet av meridionale temperaturvariasjoner (og med det meridionale tetthetsvariasjoner).

Termalvind er ofte(st) drevet av horisontale temperaturgradienter, derav «termal». Benevnin-gen er misvisende i den forstand at alle horisontale tetthetsvariasjoner gir opphav til termalvind (ikke bare temperatur), og at termalvind finnes også i havet (hvor «strøm», ikke «vind», benyt-tes).

«Horisontal tetthetsgradient» betyr horisontal gradient på en nivåflate ($z = \text{konst.}$) for en inkompressibel væske eller på en geopotensialflate ($p = \text{konst.}$) for en kompressibel væske.

Variasjoner i tetthet ρ er gitt med en *tilstandsligning*. Dette er en empirisk eller termodynamisk utledet sammenheng mellom termodynamiske størrelser og tetthet.

For havet skrives tilstandsligningen gjerne på formen

$$\rho = \rho(S, T, p) \quad (204)$$

Vi kommer tilbake til ulike former for tilstandsligningen for sjøvann.

For atmosfæren brukes gjerne den ideelle gasslov

$$p = \rho R T \quad \text{eller} \quad \rho = \frac{p}{R T} \quad (205)$$

hvor $R = 287 \text{ J}/(\text{kg K})$ er gasskonstanten og T er temperatur i Kelvin.

2.7 Termalvind uttrykt med nivåkoordinat

Geostrofi gir oss vinden på en konstant høyde z , ligning (145), eller på en flate med konstant trykk p , ligning (180). For å kunne si noe om hvordan \mathbf{u}_g varierer i vertikalretningen, ser vi på hvordan variasjoner i tettheten ρ påvirker den geostrofiske balansen i vertikal retning.

Det kan være hensiktsmessig å uttrykke tettheten ρ som

$$\rho = \rho_0 + \sigma \quad (206)$$

der ρ_0 (kg/m^3) er konstant, ofte kalt en referansetetthet, og σ (kg/m^3) gir variasjonener i tetthet relativt til ρ_0 , dvs. $\sigma/\rho_0 \ll 1$.

Fra (206) følger det da at

$$\frac{\partial \rho}{\partial x} = \frac{\partial \sigma}{\partial x} \quad \text{og} \quad \frac{\partial \rho}{\partial y} = \frac{\partial \sigma}{\partial y} \quad (207)$$

Deriverer vi (145) med hensyn på z og bruker at

$$\frac{1}{\rho} = \frac{1}{\rho_0 + \sigma} \approx \frac{1}{\rho_0} \quad (208)$$

får vi

$$\frac{\partial u_g}{\partial z} = -\frac{1}{f \rho_0} \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial p}{\partial z} \right) \quad (209)$$

og

$$\frac{\partial v_g}{\partial z} = \frac{1}{f \rho_0} \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial p}{\partial z} \right) \quad (210)$$

Hydrostatisk tilnærming fra ligning (55) innsatt i parentesene over, samt bruk av (207), gir

$$\frac{\partial u_g}{\partial z} = \frac{g}{f \rho_0} \frac{\partial \sigma}{\partial y} \quad (211)$$

$$\frac{\partial v_g}{\partial z} = -\frac{g}{f\rho_0} \frac{\partial \sigma}{\partial x} \quad (212)$$

På vektorform gir dette

$$\boxed{\frac{\partial \mathbf{u}_g}{\partial z} = -\frac{g}{f\rho_0} \hat{\mathbf{z}} \times \nabla \sigma} \quad (213)$$

Uttrykket (213) viser at den *horisontale* tetthetsgradienten $\nabla \sigma$ gir opphav til et *vertikalt* hastighetsskjær $\partial \mathbf{u}_g / \partial z$.

Variasjoner i temperatur er ofte den viktigste faktoren for endring av tetthet. Og tilbake i tid var vitenskapen mest opptatt av atmosfærens dynamikk. Av disse to årsakene kalles uttrykket (213) – og tilsvarende uttrykk som angir hvordan geostrofisk strøm varierer i vertikalen – for *termalvind*.

Termalvinduttrykk gjelder også for havet selv om tettheten her også kan være styrt av saltholdighet, og selv om vi bruker strøm og ikke vind til å beskrive bevegelse i havet.

2.8 Termalvind uttrykt med trykk-koordinat

Vi tar her utgangspunkt i geostrofisk uttrykk i trykk-koordinater (180). Dersom vi deriverer dette uttrykket med hensyn på p og bruker den hydrostatiske tilnærmingen

$$\frac{\partial p}{\partial z} = -\rho g \quad \text{eller} \quad \frac{\partial z}{\partial p} = -\frac{1}{\rho g} \quad (214)$$

får vi

$$\frac{\partial u_g}{\partial p} = -\frac{g}{f} \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial z}{\partial p} \right)_p = -\frac{g}{f} \frac{\partial}{\partial y} \left(-\frac{1}{\rho g} \right)_p = \frac{1}{f} \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{1}{\rho} \right)_p \quad (215)$$

og

$$\frac{\partial v_g}{\partial p} = -\frac{1}{f} \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{1}{\rho} \right)_p \quad (216)$$

Den ideelle gassloven (5) beskriver sammenhengen mellom p , ρ og T for tørr luft på en god måte. Fra (205) har vi at

$$p = \rho R T \quad \text{eller} \quad \frac{1}{\rho} = \frac{R T}{p} \quad (217)$$

Høyre uttrykk i (217) innsatt i (215) og (216), gir

$$\frac{\partial u_g}{\partial p} = \frac{R}{f p} \left(\frac{\partial T}{\partial y} \right)_p \quad (218)$$

$$\frac{\partial v_g}{\partial p} = -\frac{R}{f p} \left(\frac{\partial T}{\partial x} \right)_p \quad (219)$$

eller

$$\boxed{\frac{\partial \mathbf{u}_g}{\partial p} = -\frac{R}{f p} \hat{\mathbf{z}}_p \times \nabla_p T} \quad (220)$$

Formelen over er termalvind i trykk-koordinat og uttrykker hvordan geostrofisk hastighet \mathbf{u}_g endrer seg med endring i trykk p , altså i vertikalen.

2.8.1 Jordens sonale jetstrømmer

Jetstrømmene på jorden – på begge halvkuler – er alltid rettet mot øst og de eksisterer på grunn av at temperaturen faller fra tropene mot høyere breddegrader. Dette følger direkte fra termalvinduttrykket:

På den nordlige halvkule er

$$\left. \frac{\partial T}{\partial y} \right|_p < 0 \quad (221)$$

mens på den sørlige halvkule er

$$\left. \frac{\partial T}{\partial y} \right|_p > 0 \quad (222)$$

Samtidig er $f > 0$ på den nordlige halvkule og $f < 0$ på den sørlige halvkule.

For begge halvkuler gir dette at sonal komponent av termalvinduttrykket (218)

$$\frac{\partial u_g}{\partial p} = \frac{R}{f p} \left(\frac{\partial T}{\partial y} \right)_p < 0 \quad (223)$$

Siden p avtar med økende høyde, må da u_g øke med økende høyde.

Dette forklarer jordens subtropiske jetstrømmer på rundt 30° N og 30° S. Sterkest vindstyrke (ca. 30–40 m/s) finnes på en høyde tilsvarende $p = 200$ hPa, eller rundt 10–12 km over havnivå.

Det er også subtropiske jetstrømmer på rundt 60° N og 30° S. Disse jetstrømmene kan også forklares med fallende temperatur med økende breddegrad. Vi kommer tilbake til en forklaringsmodell for disse basert på termalvinduttrykkene i avsnitt 2.12.

2.9 Termalvinduttrykket integrert mellom to isobarer (§7.3.5)

Integrerer vi x -komponenten av termalvinduttrykket (218) mellom de to isobarflatene $p = p_1$ og $p = p_2$, får vi

$$\int_{p_1}^{p_2} \frac{\partial u_g}{\partial p} dp = \frac{R}{f} \int_{p_1}^{p_2} \left(\frac{1}{p} \left(\frac{\partial T}{\partial y} \right)_p \right) dp \quad (224)$$

$$= \frac{R}{f} \left(\frac{\partial \bar{T}}{\partial y} \right)_p \int_{p_1}^{p_2} \frac{1}{p} dp \quad (225)$$

I den siste overgangen har vi brukt at \bar{T} representerer middelverdien av T mellom isobarflatene $p = p_1$ og $p = p_2$. Siden $\int x^{-1} dx = \ln x$, følger det at

$$u_T \equiv u_g(p_2) - u_g(p_1) = \frac{R}{f} \ln \frac{p_2}{p_1} \left(\frac{\partial \bar{T}}{\partial y} \right)_p \quad (226)$$

$$= -\frac{R}{f} \ln \frac{p_1}{p_2} \left(\frac{\partial \bar{T}}{\partial y} \right)_p \quad (227)$$

der u_T er x -komponenten til termalvindvektoren \mathbf{u}_T , og hvor vi i siste overgang har brukt at $\ln(a/b) = -\ln(b/a)$. Tilsvarende får vi for y -komponenten:

$$v_T \equiv v_g(p_2) - v_g(p_1) = \frac{R}{f} \ln \frac{p_1}{p_2} \left(\frac{\partial \bar{T}}{\partial x} \right)_p \quad (228)$$

Termalvind-komponentene (227) og (228) kan uttrykkes på vektorform

$$\mathbf{u}_T = \mathbf{u}_g(p_2) - \mathbf{u}_g(p_1) = \frac{R}{f} \ln \frac{p_1}{p_2} \hat{\mathbf{z}}_p \times \nabla_p \bar{T} \quad (229)$$

Merk at det er hensiktsmessig å bruke $\ln(p_1/p_2)$ i termalvinduttrykkene siden $p_1 > p_2$, som gir oss at $\ln(p_1/p_2) > 0$.

Uttrykk (229) viser at termalvind \mathbf{u}_T kan bestemmes når vi kjenner $(\partial \bar{T} / \partial x)_p$ og $(\partial \bar{T} / \partial y)_p$.

2.10 Tolkning av termalvind

2.10.1 Sammenheng mellom geostrofisk vind og termalvind

Det følger fra (229) at termalvind er differansen mellom geostrofisk vind på to isobarflater. Termalvinden sier derfor hvor stort det vertikale hastighets skjæret er. Kjenner vi to av de tre vektorene $\mathbf{u}_g(p_1)$, $\mathbf{u}_g(p_2)$ og \mathbf{u}_T , kan vi utlede den tredje vektoren direkte fra vektorsummen

$$\mathbf{u}_g(p_1) + \mathbf{u}_T = \mathbf{u}_g(p_2) \quad (230)$$

2.10.2 Orientering

Det følger fra (229) at \mathbf{u}_T er rettet normalt på $\nabla_p \bar{T}$, det vil si parallelt med isotermene. På den nordlige halvkule vil lav temperatur ligge til venstre for \mathbf{u}_T (til høyre på den sørlige halvkule grunnet fortegnet til f).

2.10.3 $\nabla_p \bar{T} = \mathbf{0}$

Dersom den horisontale middeltemperaturen mellom isobarflatene avgrenset av $p = p_1$ og $p = p_2$ er konstant, $\nabla_p \bar{T} = \mathbf{0}$, følger det fra (229) at $\mathbf{u}_g(p_1) = \mathbf{u}_g(p_2)$, det vil si at den geostrofiske vinden er uendret i høydeintervallet avgrenset av isobarflatene p_1 og p_2 . Gjelder dette for hele atmosfæren, sier vi at atmosfæren er *barotrop*. Det er da uniform vertikal hastighet i atmosfæren.

2.10.4 $\nabla_p \bar{T} = \text{konst} \neq \mathbf{0}$

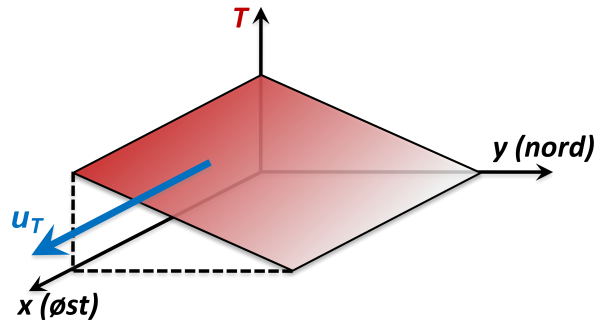
I dette tilfellet vil $\mathbf{u}_g(p_1) \neq \mathbf{u}_g(p_2)$, det vil si at vi har et vertikalt vindskjær. Atmosfæren er da *baroklin*.

Dersom vi antar at $p = p_1$ representerer bakketrykket og at $\mathbf{u}_g(p_1)$ er liten ved bakken (det vil si at $\mathbf{u}_g(p_1) \approx \mathbf{0}$), følger det fra (229) at $|\mathbf{u}_T|$ og $|\mathbf{u}_g(p_2)|$ øker når p_2 avtar, og at økningen skalerer med $\ln(p_1/p_2)$. Derfor øker den termale vinden med høyden så lenge det er en horisontal temperaturgradient mellom p_1 og p_2 .

2.10.5 $(\partial \bar{T} / \partial y)_p = \text{konst} < 0$, $(\partial \bar{T} / \partial x)_p = 0$ og $f > 0$

I dette tilfellet er vi på den nordlige halvkule og temperaturen avtar mot nord, se figur 22. Fra (227) og (228) ser vi at $u_T > 0$ og $v_T = 0$, det vil si at den termiske vinden har en østlig komponent (i positiv x -retning).

Det er temperaturgradienten mellom sør og nord som er opphavet til at jetstrømmene er østlig rettet på den nordlige halvkule.



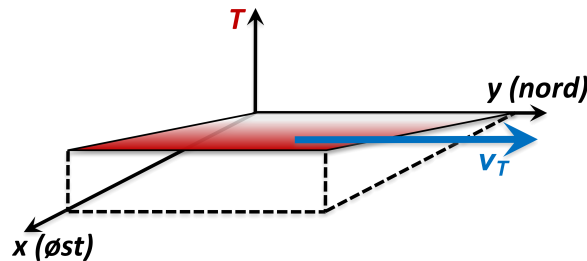
Figur 22: Illustrasjon av tilfellet $(\partial\bar{T}/\partial y)_p = \text{konst} < 0$, $(\partial\bar{T}/\partial x)_p = 0$ og $f > 0$. Merk at den resulterende termalvinden er rettet i positiv x -retning.

2.10.6 $(\partial\bar{T}/\partial y)_p = \text{konst} > 0$, $(\partial\bar{T}/\partial x)_p = 0$ og $f < 0$

I dette tilfellet er vi på den sørlige halvkule og temperaturen avtar mot sør. Siden både $(\partial\bar{T}/\partial y)_p$ og f har motsatt fortegn i forhold til tilfellet i seksjon (2.10.5), gir denne konfigureringen samme dynamikk som i seksjon (2.10.5), altså er jetstrømmen østlig rettet også på den sørlige halvkule.

2.10.7 $(\partial\bar{T}/\partial x)_p = \text{konst} > 0$, $(\partial\bar{T}/\partial y)_p = 0$ og $f > 0$

I dette tilfellet er vi på den nordlige halvkule og temperaturen øker mot øst, se figur 23. Fra (227) og (228) ser vi at $u_T = 0$ og $v_T > 0$, det vil si at den termiske vinden har en nordlig komponent (i positiv y -retning).

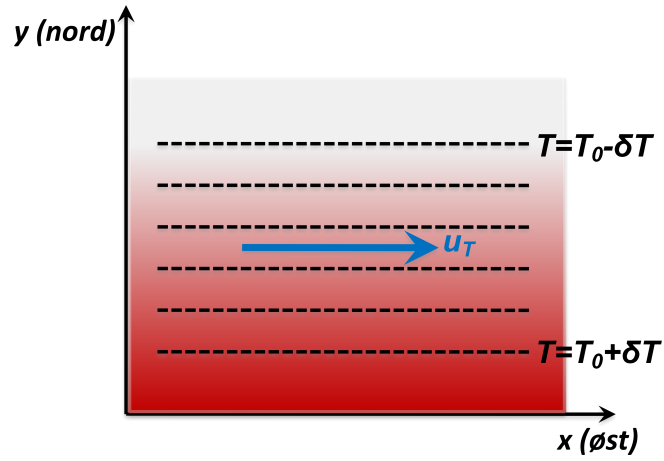


Figur 23: Illustrasjon av tilfellet $(\partial\bar{T}/\partial x)_p = \text{konst} > 0$, $(\partial\bar{T}/\partial y)_p = 0$ og $f > 0$. Merk at den resulterende termalvinden er rettet i positiv y -retning.

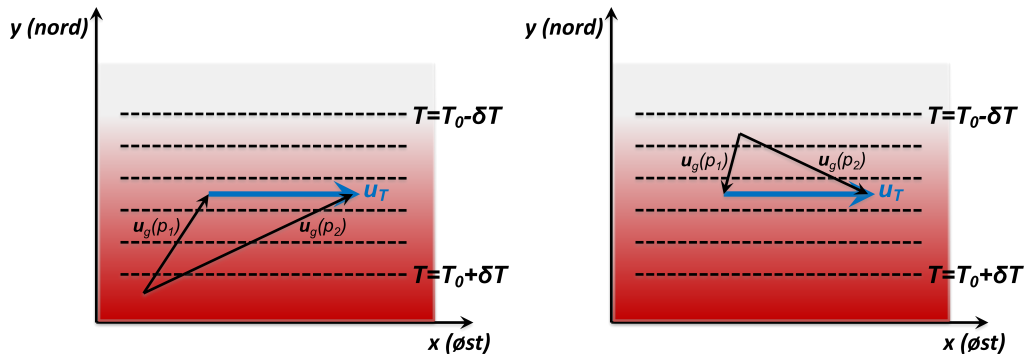
2.10.8 Kald og varm adveksjon

Termalvinden diskutert i seksjon (2.10.5) kan representeres som vist i figur 24, med avtagende temperatur mot nord og \mathbf{u}_T rettet østover.

Dersom den geostrofiske vinden på nivå $p = p_1$ er rettet mot lavere temperatur (nordover), se venstre del av figur 25, følger det fra vektorsummen (229) at $\mathbf{u}_g(p_2)$ er dreiet med klokken i forhold til $\mathbf{u}_g(p_1)$. I tillegg følger det at den geostrofiske vinden bringer varm luft med seg. Dette kalles *varm adveksjon*. Dersom $\mathbf{u}_g(p_1)$ betegner vinden på bakkenivå, betyr dette at vinden dreier stadig mer til høyre relativt $\mathbf{u}_g(p_1)$ når en beveger seg oppover i atmosfæren.



Figur 24: Illustrasjon på termalvind \mathbf{u}_T for et temperaturfelt som avtar mot nord.



Figur 25: Som figur 24 og for en antatt nord-rettet $\mathbf{u}_g(p_1)$ (figur til venstre) og sør-rettet $\mathbf{u}_g(p_1)$ (figur til høyre).

På tilsvarende måte viser den høyre del av figur 25 en situasjon der $\mathbf{u}_g(p_1)$ er rettet mot høyere temperatur (sørover). I dette tilfellet er $\mathbf{u}_g(p_2)$ dreiet *mot* klokken i forhold til $\mathbf{u}_g(p_1)$, og den geostrofiske vinden bringer kald luft med seg. Dette kalles *kald adveksjon*. Dersom $\mathbf{u}_g(p_1)$ betegner vinden på bakkenivå, betyr dette at vinden dreier stadig mer til venstre relativt $\mathbf{u}_g(p_1)$ når en beveger seg oppover i atmosfæren.

Siden temperaturen avtar mot begge polene, følger det fra diskusjonen over at den geostrofiske vinden vil alltid – og uavhengig av retningen til $\mathbf{u}_g(p_1)$ – dreies mot øst når en beveger seg oppover i atmosfæren. Det er følgelig den fallende temperaturen når vi går fra tropene til høyere (nordlige og sørlige) breddegrader som gjør at vi har østlig rettet vind i høyden når vi fjerner oss fra ekvator.

2.10.9 Eksempel termalvind, idealisert eksempel

Kommer...

2.10.10 Vertikalt hastighetsskjær i et lavtrykk med kald kjerne

Et vinterlavtrykk på den nordlige halvkule har gjerne en kald kjerne. Hvordan endrer vinden seg med høyden i et slikt system? Se bort fra friksjon.

Venstre del av figur 26 viser et lavtrykk på den nordlige halvkule. Sirkulasjonen følger isobarene og er rettet mot klokken. Ved bakken er den geostrofiske vinden langs positiv y -akse rettet vestover ($u_g(p_1)$ i figuren). På tilsvarende måte er geostrofisk vind langs negativ x -akse rettet sørover ($v_g(p_1)$ i figuren).

Høyre del av figuren indikerer at temperaturen er lavest i lavtrykkets sentrum (blå farge). Dette betyr at langs den positive y -aksen er termalvinden rettet vestover, i samme retning som $u_g(p_1)$. Langs den negative x -aksen er termalvinden rettet sørover, i samme retning som $v_g(p_1)$.

$\mathbf{u}_g(p_2)$ har følgelig samme orientering som $\mathbf{u}_g(p_1)$, og fra (230) følger det da at $|\mathbf{u}_g(p_2)| > |\mathbf{u}_g(p_1)|$. Følgelig *øker* vinden med høyden i et lavtrykk med kald kjerne.

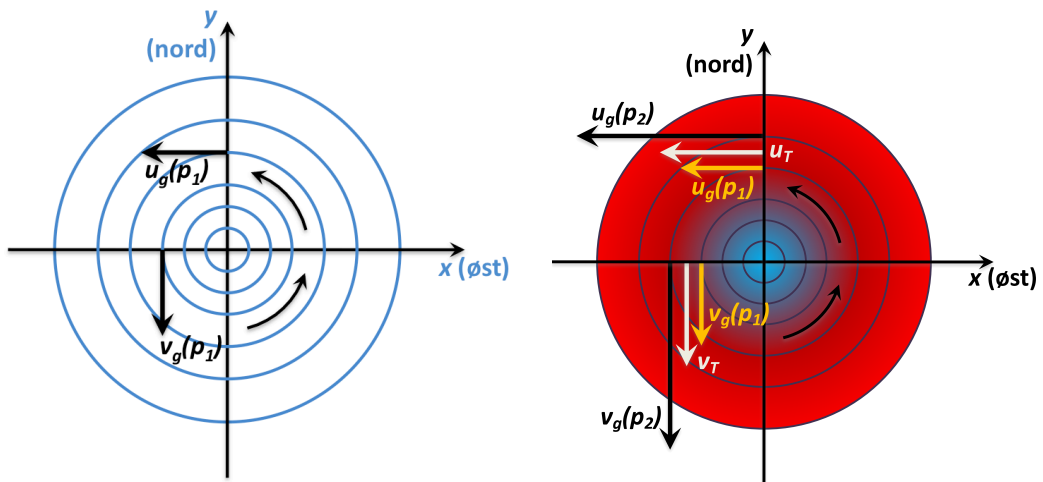
2.10.11 Vertikalt hastighetsskjær i et lavtrykk med varm kjerne

Orkaner og tyfoner er eksempler på lavtrykk med varm kjerne. Hvordan endrer vinden seg med høyden i et slikt system? Se bort fra friksjon.

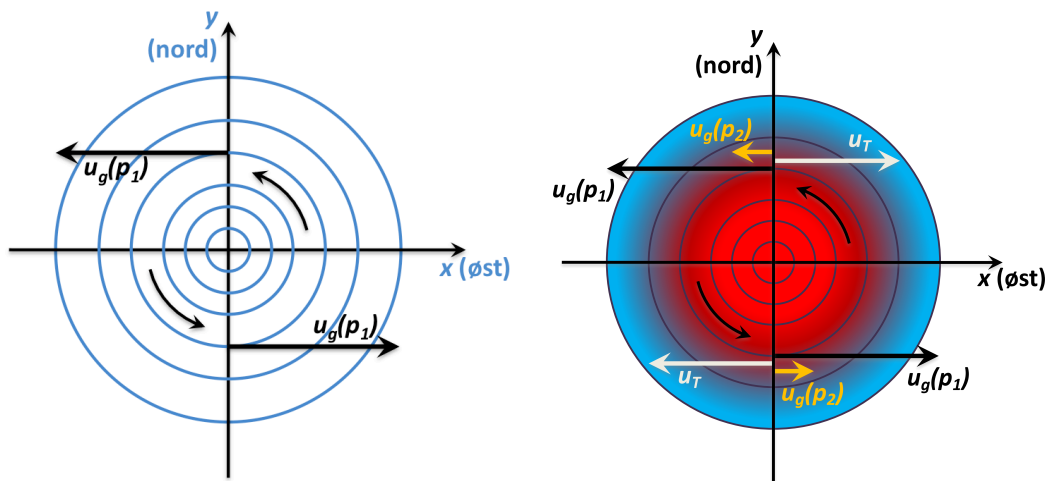
Venstre del av figur 27 viser et lavtrykk på den nordlige halvkule. Sirkulasjonen følger isobarene og er rettet mot klokken. Ved bakken er den geostrofiske vinden langs positiv y -akse rettet vestover (øvre $u_g(p_1)$ i figuren). På tilsvarende måte er geostrofisk vind langs negativ y -akse rettet østover (nedre $u_g(p_1)$ i figuren).

Høyre del av figuren indikerer at temperaturen er høy i lavtrykkets sentrum (rød farge). Dette betyr at langs den positive y -aksen er termalvinden rettet østover, i motsatt retning av den øverste $u_g(p_1)$ i figuren. Langs den negative y -aksen er termalvinden rettet vestover, i motsatt retning av den nederste $u_g(p_1)$.

Fra (230) følger det da at $|\mathbf{u}_g(p_2)| < |\mathbf{u}_g(p_1)|$. Følgelig *avtar* vinden med høyden i et lavtrykk med varm kjerne. Orienteringen til $\mathbf{u}_g(p_2)$ relativt $\mathbf{u}_g(p_1)$ avhenger av $|\mathbf{u}_g(p_1)|$ og $|\mathbf{u}_T|$. I en orkan kan gjerne $|\mathbf{u}_g(p_1)| = 30 \text{ m s}^{-1}$ og $|\mathbf{u}_T| = 25 \text{ m s}^{-1}$. I så fall er $|\mathbf{u}_g(p_2)| = 5 \text{ m s}^{-1}$ og rettet i samme retning som $\mathbf{u}_g(p_1)$.



Figur 26: Lavtrykk på nordlige halvkule med en kald kjerne. De blå sirulære kurvene indikerer lavtrykkets isobarer (med lavest trykk i sentrum), mens fargen i høyre del av figuren angir lavtrykkets temperatur. $u_g(p_1)$ er geostrofisk vind ved bakkenivå, $u_g(p_2)$ geostrofisk vind i høyden og u_T den termale vinden.



Figur 27: Lavtrykk på nordlige halvkule med en varm kjerne. De blå sirulære kurvene indikerer lavtrykkets isobarer (med lavest trykk i sentrum), mens fargen i høyre del av figuren angir lavtrykkets temperatur. $u_g(p_1)$ er geostrofisk vind ved bakkenivå, $u_g(p_2)$ geostrofisk vind i høyden og u_T den termale vinden.

2.11 Sammenheng mellom geostrofisk vind og termalvind i atmosfæren

Sammenhengen mellom geostrofisk vind uttrykt på nivåflater og trykkflater, samt termalvind, kan belyses ved å se på meridional temperaturgradient i atmosfæren på midlere breddegrader.

De tre uttrykkene det er snakk om følger fra avsnittene 2.1.4, 2.3 og 2.9:

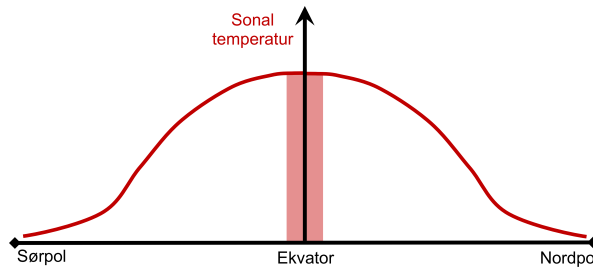
$$u_g = -\frac{1}{f\rho} \left. \frac{\partial p}{\partial y} \right|_z \quad (231)$$

$$u_g = -\frac{g}{f} \left. \frac{\partial z}{\partial y} \right|_p \quad (232)$$

$$u_T = -\frac{R}{f} \ln \frac{p_2}{p_1} \left. \frac{\partial \bar{T}}{\partial y} \right|_p \quad (233)$$

I de neste avsnittene holder vi oss borte fra ekvator siden geostrofisk balanse bryter sammen her. Vi ser også bort fra bevegelse, som gjerne kalles en *statisk betraktning*.

(a) Differensiert oppvarming gir $\partial T/\partial y$ Jorden mottar netto varme på lavere breddegrader og taper varme mot polene. Dette gir oss en temperaturfordeling som skissert i figur 28.



Figur 28: Skisse av sonalt midlet temperaturfordeling på jorden. Området ved ekvator er skravert siden geostrofisk balanse ikke gjelder her. Basert på figur 5.7 i M&P.

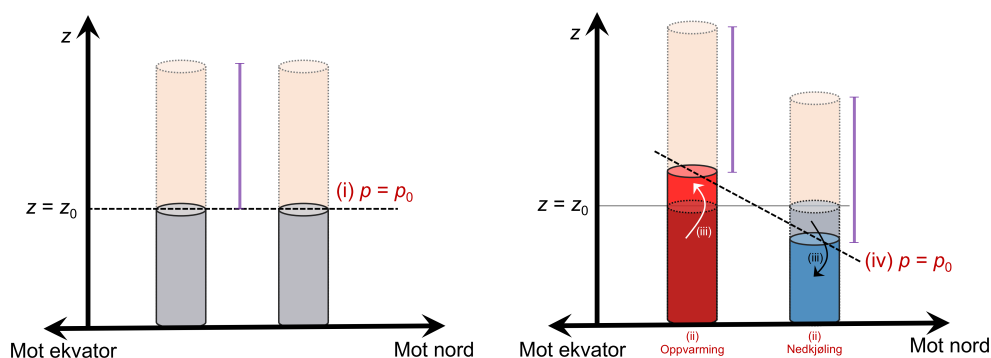
I det følgende betrakter vi den nordlige halvkule, som gir

$$\frac{\partial T}{\partial y} < 0 \quad (234)$$

(b) Hellende geopotensialflater gir $\partial z/\partial y|_p$ Vi kan skape temperaturfordelingen som skissert i figur 28 ved først å betrakte en atmosfære med uniform, sonalt temperaturfordeling, for eksempel representert med to luftøyler med lik høyde som vist til venstre i figur 29. Fra figuren er trykket på høyde $z = z_0$ lik $p = \text{konst.} = p_0$.

Luftøylen til venstre varmes opp mens søylen til høyre kjøles ned, se punkt (ii) i høyre del av figur 29.

Termisk ekspansjon medfører at (noen) luftpartikler i søylen til venstre løftes høyere enn $z = z_0$, mens termisk kontraksjon fører til at søylen til høyre blir lavere (punkt (iii) i høyre del av figur 29).



Figur 29: Til venstre: En atmosfære med uniform sonal temperatur, illustrert med to luftøyler med lik høyde, og følgelig med likt trykk $p = p_0$ for en vilkårlig høyde $z = z_0$. Til høyre: Luftøylen til venstre varmes opp mens den til høyre kjøles ned. Dette for å gjenskape temperaturgradienten i figur 28. De lilla, vertikale linjestykkene (som har samme lengde) illustrerer atmosfærens «høyde», og med det vekt, over $z = z_0$ før oppvarming og nedkjøling finner sted. Basert på figur 5.13 og 5.14 i M&P.

Når vi ser bort fra bevegelse, betyr overstående at geopotensialflaten med $p = p_0$ er høyest i tropene og lavest mot nord, se punkt (iv) i høyre del av figur 29. Dette gir

$$\left. \frac{\partial z}{\partial y} \right|_p < 0 \quad (235)$$

(c) **Antagende trykk på nivåflate gir $\partial p / \partial y|_z$** På grunn av steg (iii) til høyre i figur 29, vil trykket på nivåflate $z = z_0$ øke hvor søylen ekspanderer. Dette gir høytrykk på nivå $z \leq z_0$. Tilsvarende vil trykket avta på høyde $z \geq z_0$ hvor søylen komprimeres, som gir lavtrykk her.

Dette gir

$$\left. \frac{\partial p}{\partial y} \right|_z < 0 \quad (236)$$

(d) **Oppsummert** Fra diskusjonen over følger det at

$$T, z_p, p_z \quad (237)$$

avtar med økende breddegrad på den nordlige halvkule.

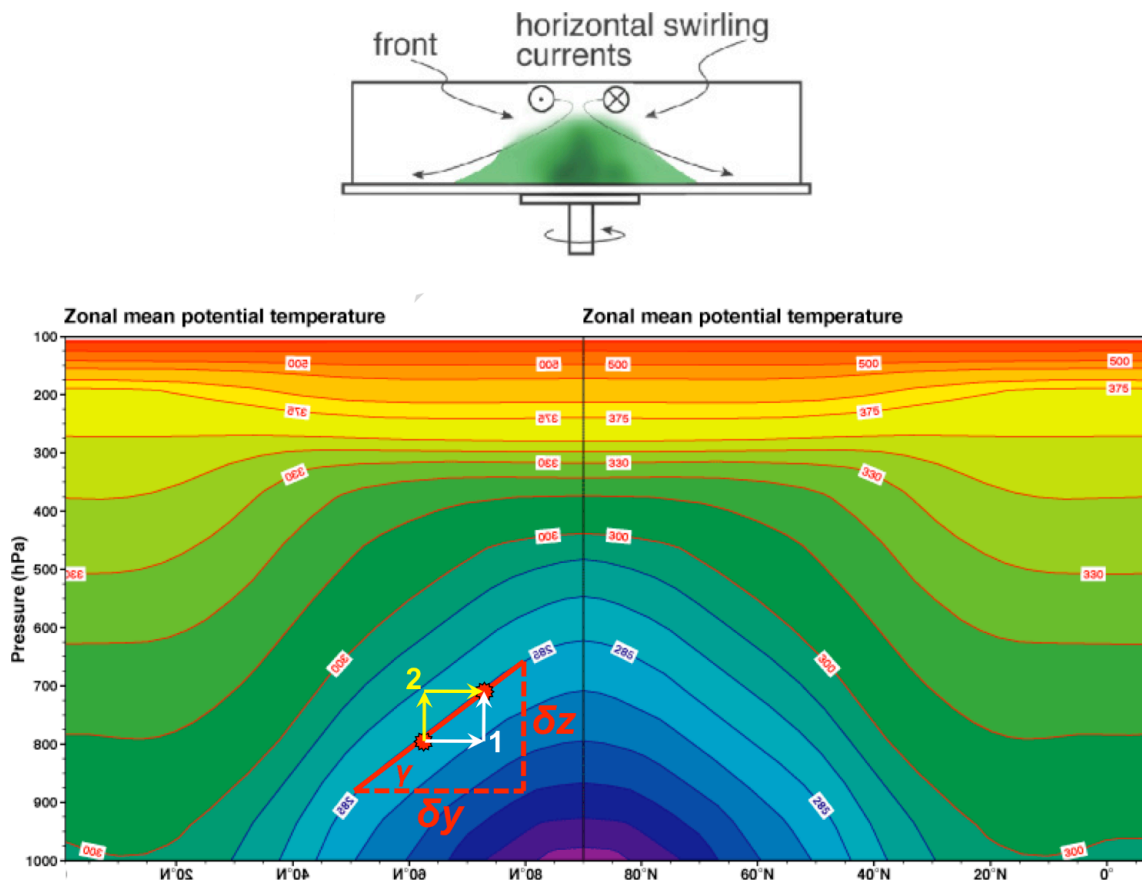
Avtagende z_p og p_z mot nord gir geostrofisk vind \mathbf{u}_g til høyre, dvs. østover.

Fallende temperatur T mot nord gir økende vind mot øst med økende høyde. Dette gjelder så lenge $\partial \bar{T} / \partial y|_p < 0$ på den nordlige halvkule og $\partial \bar{T} / \partial y|_p > 0$ på den sørlige halvkule. Det er denne faktoren som er opphavet til atmosfærens jetstrømmer på hver halvkule.

Huskeregul: Når vi faller mot lavere verdi av z_p , p_z og T får vi avbøying av geostrofisk strøm og termalvind mot høyre på den nordlige halvkule (og til venstre på den sørlige halvkule).

Regelen i rammen over gjelder generelt, ikke bare for meridional temperaturgradient på jorden som beskrevet over.

2.12 Margules sammenheng (§7.3.3)¹⁵



Figur 30: Øverst: Illustrasjon på et laboratorieeksperiment med et rundt roterende kar med med en tung (grøn) væske i sentrum og en lettere (hvit) væske utenfor. Grunnet rotasjonen holder den tunge væsken seg i en konisk sektor rundt rotasjonsaksen. Figur 7.16 i Marshall & Plumb (2008). Nederst: Reanalyse fra det Europeiske værvarslingscenteret av sonalt midlet potensiell temperatur. Den heltrukne linjen er rettet langs en isotrop, dvs. en linje med konstant potensiell temperatur. De gule og hvite pilene betegner to ulike veier fra det nederste til det øverste røde punktet på isobaren. Figur med sonalt midlet temperatur fra https://software.ecmwf.int/static/ERA-40_Atlas/docs/section_D25/parameter_zmpttp.html.

Margules sammenheng er illustrert i figur 30: I et roterende system vil en tung væske beskrive en konisk form rundt og opp langs rotasjonsaksen på tross av at gravitasjonskraften prøver å smøre den tunge væsken horisontalt utover.

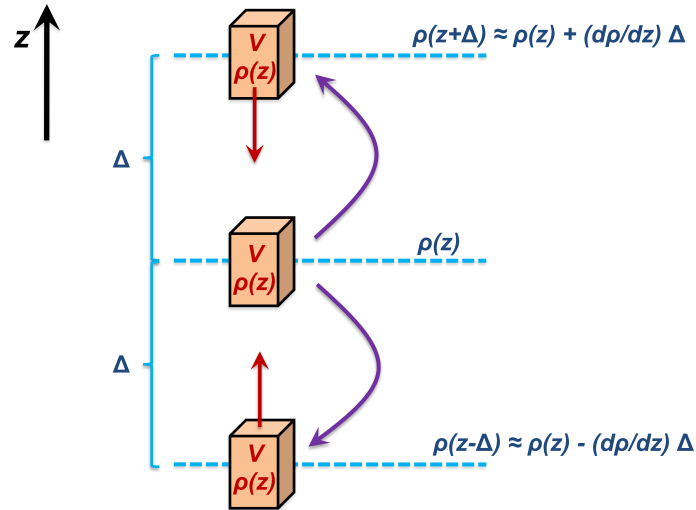
Før utledningen av Margules sammenheng, går vi først gjennom tre størrelser som ofte fremkommer når vi betrakter to eller flere væsker i et roterende system: Oppdriftsfrekvensen N (1/s), redusert gravitasjon g' (m/s^2) og spinsatsen.

¹⁵Se også Steinacker & Brönnimann, *Stationary flow near fronts*, Met. Zeitschrift, **25**, 805–809, 2016, og seksjon 5.2 i *LECTURES ON DYNAMICAL METEOROLOGY* av Roger K. Smith, Version: December 11, 2007.

2.12.1 Oppdriftsfrekvens/Brunt-Väisälä frekvensen N

En sentral størrelse i analyse av dynamikken i atmosfæren og i havet er oppdriftsfrekvensen eller Brunt-Väisälä frekvensen N (enhet s^{-1}). Brunt-Väisälä frekvensen gir den frekvensen en væskepartikkel vil beskrive dersom væskepartikkelen forsvyves i forhold til det nivået der partikkelen har nøytral oppdrift. Nøytral oppdrift vil si at partikkelen har samme tetthet som omgivelsene, det vil si at det ikke virker en vertikal oppdriftskraft på partikkelen.

Brunt-Väisälä frekvensen kan utledes basert på figur 31. Vi betrakter en væskepartikkel på nivå



Figur 31: Illustrasjon på en væskepartikkel med (fast) volum V og tetthet ρ som løftes eller senkes vertikalt en avstand Δ . Partikkelens tetthet ρ er identisk med omgivelsenes tetthet på nivå z . Bakgrunnstettheten avtar i positiv z -retning slik at $d\rho/dz < 0$.

z . Partikkelen har samme tetthet som omgivelsene på nivå z , $\rho(z)$. Det virker derfor ingen krefter på partikkelen på nivå z . Ligger partikkelen i ro ved et tidspunkt, vil partikkelen derfor forbli i ro så lenge det ikke virker krefter på partikkelen.

Væskepartikkelen løftes så til nivå $z + \Delta$, hvor $\Delta > 0$. Omgivelsene på nivå $z + \Delta$ har tetthet $\rho(z + \Delta) < \rho(z)$. Siden partikkelen har større tetthet enn omgivelsene på nivå $z + \Delta$, vil partikkelen synke.

Arkimedes' prinsipp sier at kraften $F = ma$ som virker på væskepartikkelen på nivå $z + \Delta$ er lik differansen mellom partikkelens gravitasjonsbidrag

$$\rho(z)V(-g) \quad (238)$$

og bidraget fra den omkringliggende væsken

$$\rho(z + \Delta)V(-g) \quad (239)$$

Dette gir

$$F = (-g)V[\rho(z) - \rho(z + \Delta)] \quad (240)$$

Siden $\rho(z + \Delta) < \rho(z)$, er F rettet i negativ z -retning. Partikkelen vil derfor føle en nedoverrettet akslererasjon.

Taylorrekkeutvikling til første orden (se seksjon A.14) gir

$$\rho(z) - \rho(z + \Delta) \approx -\frac{\partial \rho}{\partial z} \Delta \quad (241)$$

Uttrykk (240) kan derfor skrives

$$F = gV \frac{\partial \rho}{\partial z} \Delta \quad (242)$$

Tilsvarende uttrykk fås for en partikkel som senkes i negativ z -retning.

Newtons 2. lov gir at

$$F = ma = m \frac{d^2 \Delta}{dt^2} \quad (243)$$

hvor massen $m = \rho(z)V$. Kombinert med (242) gir dette

$$\rho V \frac{d^2 \Delta}{dt^2} = gV \frac{\partial \rho}{\partial z} \Delta \quad (244)$$

hvor $\rho = \rho(z)$.

Siste uttrykk kan evt. skrives på formen

$$\rho V \frac{d^2 \Delta}{dt^2} + \rho_1 V \left(-\frac{g}{\rho} \frac{\partial \rho}{\partial z} \right) \Delta = 0 \quad (245)$$

eller

$$\frac{d^2 \Delta}{dt^2} + N^2 \Delta = 0 \quad (246)$$

hvor N er oppdriftsfrekvensen eller Brunt-Väisälä frekvensen

$$\boxed{N^2 \equiv -\frac{g}{\rho} \frac{\partial \rho}{\partial z}} \quad (247)$$

Differensialligningen (246) er ligningen for en udempet svingning med løsning

$$\delta z = C_0 \cos(Nt) + C_1 \sin(Nt) \quad (248)$$

hvor C_0 og C_1 er konstanter (bestemt av initialbetingelser). Løsningen (248) uttrykker at en væskepartikkel som forflyttes fra et nivå med nøytral oppdrift vil beskrive en vertikal svingning med frekvens N .

Løftes partikkelen som vist i figur 31, vil partikkelen først falle siden oppdriftskraften F er rettet i negativ z -retning. Oppdriftskraften reduseres ettersom partikkelen nærmer seg nivå z . på nivå z virker det ingen kraft på partikkelen, men partikkelen vil fortsette å falle i negativ z -retning grunnet partikkelens nedoverrettede fart på nivå z .

For nivå lavere enn z er oppdriftskraften F rettet oppover, i positiv z -retning. Partikkelen vil derfor stoppe på et nivå under z , før partikkelen begynner å stige. Når partikkelen når nivå z er oppdriftskraften $F = 0$, men partikkelen vil fortsette å stige grunnet partikkelens oppoverrettede fart på nivå z .

På denne måten vil enhver partikkel som forskyves vertikalt svinge opp og ned. Svingningene vil fortsette helt til friksjon stopper oscillasjonen.

Svingefrekvensen N avhenger av styrken til den vertikale stratifisering til den omkringliggende væsken $\partial\rho/\partial z$. Svak stratifisering, det vil si liten $\partial\rho/\partial z$, vil gi lang svingeperiode. Sterk stratifisering, eller stor $\partial\rho/\partial z$, vil gi kort svingeperiode.

Er den vertikale bakgrunnsstratifisering symmetrisk om nivå z vil partikkelen svinge mellom nivåene $z - \Delta$ og $z + \Delta$.

Det er en rekke eksempler på vertikale svingninger i atmosfæren og i havet generert av små vertikale forskyvninger av væskepartikler. Det best kjente eksempelet er kanskje lebølger nedstrøms av fjell (som kan generere linseskyer) og interne bølger i havet.

2.12.2 Redusert gravitasjon g'

Redusert gravitasjon g' er en ofte forekommende størrelse i dynamisk meteorologi og oseanografi.

Redusert gravitasjon er definert som

$$g' \equiv g \frac{\Delta\rho}{\rho_{\text{ref}}} \quad (249)$$

hvor g er standard gravitasjon, $\Delta\rho$ er vertikal tetthetsforskjell i en væske og ρ_{ref} er en typisk verdi for væsken(es) tetthet.

For en væske som er *stabilt stratifisert*, er $g' > 0$. En stabilt stratifisert væske betyr at væskens tetthet avtar med høyden, det vil si i positiv z -retning, slik at $\partial\rho/\partial z < 0$. Dersom $\partial\rho/\partial z > 0$, seier vi at væsken er *statisk ustabil*. Sistnevnte tilstand vil føre til vertikal blanding inntil væsken oppnår nøytral eller positiv stratifisering.

For havet er typisk $1024 \text{ kg m}^{-3} < \rho < 1028 \text{ kg m}^{-3}$. (249) endrer seg lite om vi velger $\rho_{\text{ref}} = 1024 \text{ kg m}^{-3}$, 1026 kg m^{-3} eller 1028 kg m^{-3} . g' er derfor bestemt av $\Delta\rho$. Dette gir oss en frihet til å bruke den ρ_{ref} som forenkler et uttrykk så lenge ρ_{ref} er representativ for de væskene vi betrakter.

(249) brukes for å uttrykke at gravitasjonen fører til en akselerasjon i z -retningen bare dersom partikkelens tetthet er ulik tettheten til den omkringliggende væsken.

2.12.3 Spinnetsatsen $\mathbf{L} = \text{konst.}$ og atmosfærens spinn i sonal retning

Spinnet \mathbf{L} til en partikkel med masse m og hastighet \mathbf{u} er definert som

$$\mathbf{L} = \mathbf{R} \times m \mathbf{u} \quad (250)$$

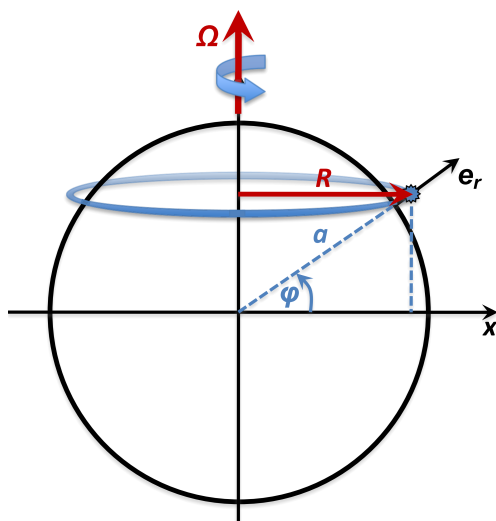
der \mathbf{R} er avstandsvektoren (minste avstand) mellom partikkelen og spinnaksen. Merk at \mathbf{R} ikke er jordens radius, men vektoren \mathbf{R} i figur 32. Spinnet kalles også anguært momentum, drivmoment og bevegelsesmengdemoment.

Den tidsderiverte av spinnet gir spinnetsatsen

$$\begin{aligned} \frac{d\mathbf{L}}{dt} &= \frac{d\mathbf{R}}{dt} \times m \mathbf{u} + \mathbf{R} \times \frac{d}{dt}(m \mathbf{u}) \\ &= \mathbf{u} \times m \mathbf{u} + \mathbf{R} \times \mathbf{F} \\ &= \mathbf{R} \times \mathbf{F} \end{aligned} \quad (251)$$

der \mathbf{F} er kraften som virker på partikkelen (Newtons 2. lov; $\mathbf{F} = m \mathbf{a}$). Dersom $\mathbf{F} \parallel \mathbf{R}$ eller $\mathbf{F} = \mathbf{0}$, følger det at

$$\mathbf{L} = \text{konst} \quad (252)$$



Figur 32: Jorden med rotasjonsvektor Ω , radius a og vektor \mathbf{R} fra rotasjonsaksen til et punkt på breddegrad φ .

Uttrykk (252) sier at spinnet \mathbf{L} er konserverert dersom det ikke virker krefter \mathbf{F} på partikkelen.

Atmosfærens spinn i sonal retning Absoluttverdi av spinnet per enhetsmasse A er

$$A = \frac{|\mathbf{L}|}{m} = |\mathbf{R} \times \mathbf{u}| \quad (253)$$

For atmosfæren består spinnet i sonal retning, eller i lengdegradsretningen, av to komponenter: Jordens rotasjon pluss atmosfærens fart i forhold til jorden. Atmosfærens absoluttverdi av spinnet per enhetsmasse i sonal retning kan derfor skrives som

$$A = \underbrace{|\mathbf{R} \times \Omega R \mathbf{e}_\lambda|}_{\text{jordens rot}} + \underbrace{|\mathbf{R} \times u \mathbf{e}_\lambda|}_{\text{sonal vind}} = |\Omega R^2 + u R| = \Omega R^2 + u R \quad (254)$$

I (254) har vi brukt at en partikkel i atmosfæren roterer med jorden i sonal retning med en fart ΩR (se 634) og at partikkelen generelt har en sonal fart u i forhold til jorden. Siste overgang på høyre side av (254) er gyldig siden vindfarten u er (alltid) liten i forhold til jordens rotasjonsfart ΩR , som betyr at summen $\Omega R^2 + u R$ er positiv.

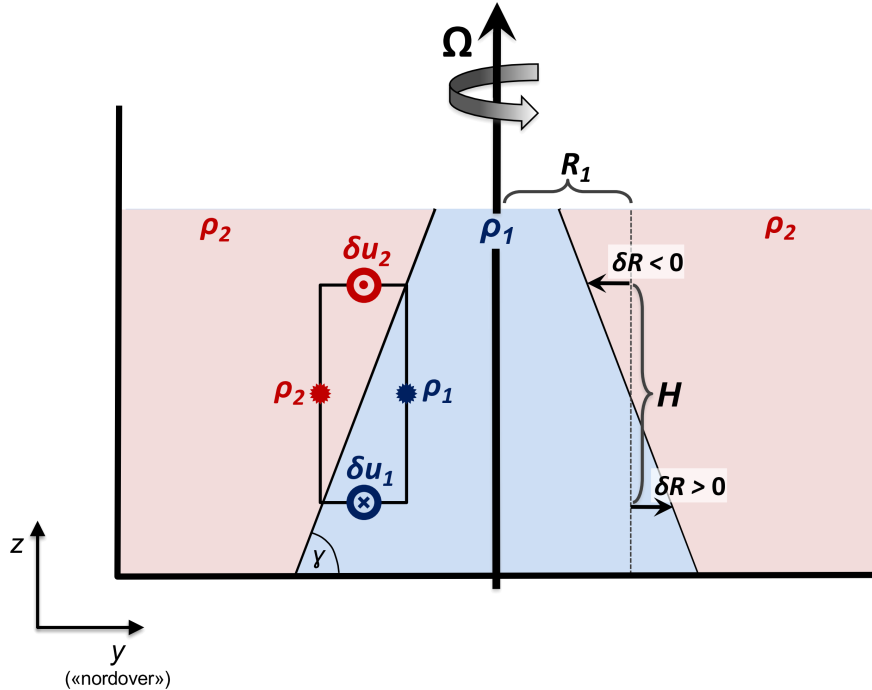
Siden atmosfærens tykkelse er svært liten i forhold til jordens radius a , kan a brukes som en tilnærming for punktets avstand fra jordens sentrum. Fra figur 32 følger det da at $R \approx a \cos \varphi$, slik at

$$A = \Omega a^2 \cos^2 \varphi + u a \cos \varphi \quad (255)$$

Kraftbalansen mellom gravitasjon og rotasjon som opprettholder den koniske formen til den tunge væsken kan utledes ved å betrakte trykkendringen mellom de to røde punktene på figur 30.

2.12.4 Utledning Margules sammenheng

Et idealisert oppsett med en tung væske omringet av en lettere væske, som illustrert i figur 30, er skissert i figur 33.



Figur 33: Illustrasjon av en likevektsituasjon for en roterende, sirkulær beholder med en tung væske med tetthet ρ_1 i sentrum, omringet av en lettere væske med tetthet ρ_2 . Initielt er væske 1 og 2 separert ved radius $R_1 = \text{konst.}$ z er rettet oppover og y «nordover», dvs. inn mot rotasjonsaksen. De sonale fartskomponentene δu_1 og δu_2 betegner avvik fra sonal fart til den roterende beholderen. Med merkingen i figuren – som er basert på utledningen – roterer den lette væsken raskere og den tunge væsken langsommere enn Ω . Følgelig oppstår det en «jetstrøm» oppe og på den varme siden av grenseflaten mellom de to væskene.

Fra figur 33 har vi at trykket p varierer i retningene y og z , det vil si at $p = p(y, z)$.

Taylorrekkeutvikling av p til laveste orden gir (se seksjon A.14)

$$\delta p = \frac{\partial p}{\partial y} \delta y + \frac{\partial p}{\partial z} \delta z \quad (256)$$

Trykkendringen langs vei 1 og vei 2 i figur (30) må være lik, slik at

$$\left(\frac{\partial p}{\partial y} \delta y + \frac{\partial p}{\partial z} \delta z \right)_{\text{vei 1}} = \left(\frac{\partial p}{\partial y} \delta y + \frac{\partial p}{\partial z} \delta z \right)_{\text{vei 2}} \quad (257)$$

Hydrostatisk tilnærming gir sammenhengen mellom vertikal endring av p og gravitasjon

$$\frac{\partial p}{\partial z} = -\rho g \quad (258)$$

(258) innsatt i 257 gir

$$\frac{\partial p_1}{\partial y} \delta y - \rho_1 g \delta z = \frac{\partial p_2}{\partial y} \delta y - \rho_2 g \delta z \quad (259)$$

Ved å dividere (259) med δy , får vi

$$\frac{\partial p_1}{\partial y} - \rho_1 g \frac{\delta z}{\delta y} = \frac{\partial p_2}{\partial y} - \rho_2 g \frac{\delta z}{\delta y} \quad (260)$$

eller

$$\frac{\delta z}{\delta y} = \frac{\frac{\partial p_1}{\partial y} - \frac{\partial p_2}{\partial y}}{g(\rho_1 - \rho_2)} \quad (261)$$

Fra figur 30 følger det at

$$\tan \gamma = \frac{\delta z}{\delta y} \quad (262)$$

(261) kombinert med (262) gir

$$\tan \gamma = \frac{\frac{\partial p_1}{\partial y} - \frac{\partial p_2}{\partial y}}{g(\rho_1 - \rho_2)} \quad (263)$$

Trykk-gradienten i (263) kan uttrykkes ved hjelp av geostrofisk hastighet u_g fra (150)

$$u_g = -\frac{1}{\rho f} \frac{\partial p}{\partial y} \quad \text{eller} \quad \frac{\partial p}{\partial y} = -u_g \rho f \quad (264)$$

Dette gir at

$$\tan \gamma = \frac{u_{g2} \rho_2 f - u_{g1} \rho_1 f}{g(\rho_1 - \rho_2)} \approx \frac{\rho_{\text{ref}} f (u_{g2} - u_{g1})}{g(\rho_1 - \rho_2)} = \frac{f}{g'} (u_{g2} - u_{g1}) \quad (265)$$

I (265) har vi brukt at $\rho_1 \approx \rho_2 \approx \rho_{\text{ref}}$ og redusert gravitasjon (249) på formen

$$g' = g \frac{\rho_1 - \rho_2}{\rho_{\text{ref}}} \quad (266)$$

Margules sammenheng følger direkte fra (265)

$$u_{g2} - u_{g1} = \tan \gamma \frac{g'}{f} \quad (267)$$

For $\varphi \approx 90^\circ$ N, som for rotasjonsakseksperimentet i øvre del av figur 30 eller ved nordpolen i nedre del av figur 30, gir dette

$$\boxed{u_{g2} - u_{g1} = \tan \gamma \frac{g'}{2\Omega}} \quad (268)$$

Margules sammenheng (267) og (268) gir differansen i geostrofisk vind mellom to z -nivåer, og er følgelig en variant av termalvind diskutert i seksjon 2.7.

2.12.5 Rossbys tilpasningsproblem (§7.3.4)

Rossbys tilpasningsproblem gir de karakteristiske rom- og tidskalaene som beskriver likevektssituasjonene vist i figur 33. Denne sammenhengen følger fra Margules sammenheng (268).

Venstre side av (268) Ser vi bort fra friksjon, som er en akseptabel antagelse når vi holder oss borte fra bunnen i det roterende karet, gjelder spinnsatsen

$$\Omega R^2 + u R = \text{konst} \quad (269)$$

Den initielle rotasjonsfarten til systemet med radius R_1 er ΩR_1 (siden væsken roterer med samme fart som bordet, som betyr at $u = 0$). Det følger da fra spinnsatsen at

$$\Omega R^2 + u R = \Omega R_1^2 \quad (270)$$

der R og u er avstand fra rotasjonsaksen og fart *etter* at vi frigjør den indre (tunge) væsken.

Når den tunge væsken er fri til å tilpasse seg en ny likevektsituasjon som vist i figur 33, vil den ha en tilnærmet konisk form med radius $R > R_1$ nede og radius $R < R_1$ oppe i karet.

Betegner vi endringen i radius relativt til R_1 med δR og hastighetsendringen med δu , hvor δR og δu kan ha begge fortegn, følger det fra (270) at

$$\Omega (R_1 + \delta R)^2 + \delta u (R_1 + \delta R) = \Omega R_1^2 \quad (271)$$

eller

$$\Omega (R_1^2 + 2 R_1 \delta R + \delta R^2) + \delta u (R_1 + \delta R) = \Omega R_1^2 \quad (272)$$

For små endringer er de kvadratiske δ -leddene, det vil si $\Omega \delta R^2$ og $\delta u \delta R$, mye mindre enn de lineære δ -leddene, slik at vi kan tilnærme (272) med

$$2 \Omega R_1 \delta R + \delta u R_1 = 0 \quad (273)$$

Dette gir

$$\delta u = -2 \Omega \delta R \quad (274)$$

(274) viser at konestrukturen vil få økt sonal hastighet oppe (hvor $\delta R < 0$) og redusert sonal hastighet nede (hvor $\delta R > 0$) relativt til den initielle rotasjonsfarten ΩR_1 .

Det følger da at

$$\delta u_2 = 2 \Omega |\delta R| \quad (275)$$

og

$$\delta u_1 = -2 \Omega |\delta R| \quad (276)$$

Innsatt i Margules sammenheng (268), får vi

$$\delta u_2 - \delta u_1 = 4 \Omega |\delta R| \quad (277)$$

På en kule Skulle den initielle sylindren med tung væske ha en vinkel φ til rotasjonsaksen, vil (274) ha følgende form

$$\delta u = -f \delta R \quad (278)$$

der Coriolisparameteren $f = 2 \Omega \sin \varphi$. I så fall kan ligningene (275)–(277) uttrykkes med f i stedet for 2Ω .

Høyre side av (268) Det følger fra figur 33 at

$$\tan \gamma = \frac{H}{2|\delta R|} \quad (279)$$

videre benytter vi oss av redusert gravitasjon, se (249),

$$g' = g \frac{\Delta \rho}{\rho} \quad (280)$$

For en væske som er *stabilt stratifisert*, det vil si at en lett væske ligger over en tyngre væske, er $g' > 0$. I vårt tilfelle har vi en stabil stratifisering (siden væsken med tetthet ρ_2 ligger over væsken med tetthet ρ_1 , og $\rho_1 > \rho_2$), slik at

$$g' = g \frac{\rho_1 - \rho_2}{\rho} \quad (281)$$

Det følger da at

$$g' H = g \frac{\rho_1 - \rho_2}{\rho} H \quad (282)$$

$$= \frac{g}{\rho} \frac{\rho_1 - \rho_2}{H} H^2 \quad (283)$$

$$= -\frac{g}{\rho} \frac{\rho_2 - \rho_1}{H} H^2 \quad (284)$$

$$= N^2 H^2 \quad (285)$$

Her er N Brunt-Väsälä frekvensen (se avsnitt 2.12.1)

$$N^2 = -\frac{g}{\rho} \frac{\partial \rho}{\partial z} \approx -\frac{g}{\rho} \frac{\rho_2 - \rho_1}{H} \quad (286)$$

Høyre side av (268) kan da skrives som

$$\frac{g' \tan \gamma}{2\Omega} = \frac{g' H}{4|\delta R|\Omega} = \frac{N^2 H^2}{4|\delta R|\Omega} \quad (287)$$

2.12.6 Rossby deformasjonsradius

Margules sammenheng gitt ved (268) kan nå uttrykkes ved hjelp av (277) og (287):

$$4\Omega |\delta R| = \frac{N^2 H^2}{4|\delta R|\Omega} \quad (288)$$

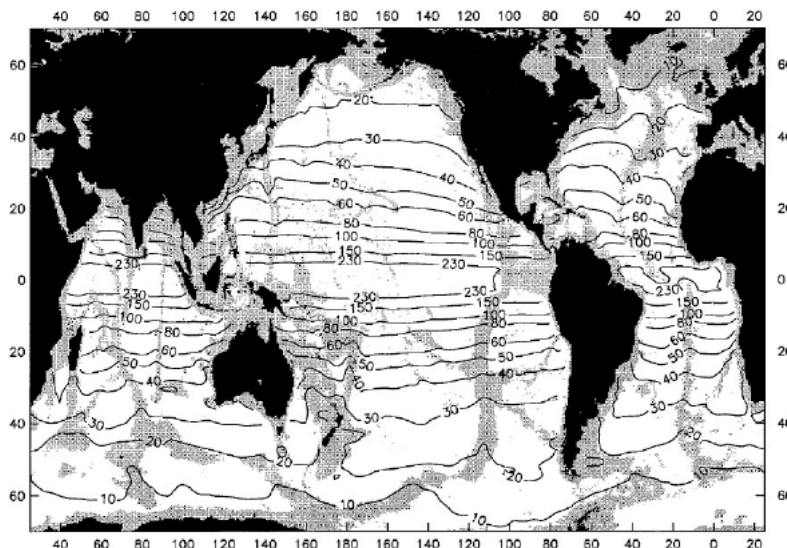
Løser vi med hensyn på $2|\delta R|$, som er en karakteristisk (eller typisk) lengdeskala for problemet, får vi

$$2|\delta R| = \frac{NH}{2\Omega} = \frac{\sqrt{g'H}}{2\Omega} \equiv L_\rho \quad (289)$$

I uttrykket over er L_ρ (m) *Rosby deformasjonsradius*, som er den karakteristiske lengdeskala hvor effekten av rotasjon balanserer effekten av stratifisering (det vil si gravitasjon).

På en kule På en kule kan nevneren over erstattes med Coriolis-parameteren f slik at et mer generelt uttrykk for Rossby deformasjonsradius er

$$L_\rho = \frac{NH}{f} = \frac{\sqrt{g'H}}{f}$$



Figur 34: Utledet Rossby deformasjonsradius (i km) i havet. Figur fra Chelton *et al.*, 1998.

Om Rossby deformasjonsradius Rossby deformasjonsradius er en fundamental størrelse for dynamikken i atmosfæren og havet; den gir lengeskalaen til lavtrykk i atmosfæren og virvler i havet. For midlere breddegrader ($|\varphi| \approx 20 - 40^\circ$) er $L_\rho \approx 700$ km for atmosfæren og 50 km for havet (se figur 34). For høyere breddegrader avtar L_ρ , mens L_ρ øker mot ekvator. Ved ekvator kan Rossby deformasjonsradius gitt ved (289) ikke benyttes da uttrykket ikke gjelder for små $|\varphi|$ (Rossby-tallet R_0 er da ikke (mye) mindre enn 1, i motsetning til antagelsen for geostrofisk balanse, nemlig $R_0 \ll 1$).

For dynamiske systemer med romlig utbredelse større enn L_ρ er hastigheten bestemt av trykk p , som er geostrofisk balanse.

For dynamiske systemer med romlig utbredelse mindre enn L_ρ er trykket p bestemt av hastighet, slik at momentumligningens $D\mathbf{u}/Dt$ ikke kan neglisjeres; slik at geostrofisk balanse ikke gjelder.

På midlere breddegrader er L_ρ for atmosfæren typisk på 10^3 km, mens L_ρ for hav er typisk 50 til 100 km.

2.13 Opprinnelig form av Margules sammenheng

Margules sammenheng ble opprinnelig utledet for å beskrive en temperaturfront i atmosfæren. Dette kan gjøres ved å benytte den ideelle gasslov

$$p = RT\rho \quad \text{eller} \quad \rho = \frac{p}{RT} \quad (290)$$

i uttrykk (265):

$$g(\rho_1 - \rho_2) \tan \gamma = f(u_{g2}\rho_2 - u_{g1}\rho_1) \quad (291)$$

Dette gir

$$g \left(\frac{p_1}{RT_1} - \frac{p_2}{RT_2} \right) \tan \gamma = f \left(u_{g2} \frac{p_2}{RT_2} - u_{g1} \frac{p_1}{RT_1} \right) \quad (292)$$

Dersom vi betrakter en liten endring i vertikal retning, vil $p_1 \approx p_2$. Temperaturdifferansen på tvers av fronten kan være stor, gjerne 10 K, slik at $T_1 \neq T_2$. Uttrykk (292) kan da forenkles til

$$g \left(\frac{1}{T_1} - \frac{1}{T_2} \right) \tan \gamma = f \left(\frac{u_{g2}}{T_2} - \frac{u_{g1}}{T_1} \right) \quad (293)$$

eller

$$g(T_2 - T_1) \tan \gamma = f(u_{g2}T_1 - u_{g1}T_2) \approx f\bar{T}(u_{g2} - u_{g1}) \quad (294)$$

hvor \bar{T} er en typisk temperatur. Siste overgang er ok siden temperaturforskjellen $|T_2 - T_1|$ er typisk 10 K, som utgjør en endring i absolutt temperatur på rundt fire prosent (10 K/273 K).

Uttrykk (294) kan da skrives på formen

$$\tan \gamma = \frac{f(u_{g2} - u_{g1})}{g(T_2 - T_1)/\bar{T}} \quad (295)$$

eller,

$$\delta u = \frac{g \tan \gamma \delta T}{f \bar{T}} \quad (296)$$

eller,

$$\tan \gamma = \frac{f\bar{T} \partial u / \partial z}{g \partial T / \partial z} \quad (297)$$

Høyre side av (296) er alltid positiv på den nordlige halvkule og negativ på den sørlige halvkule. Dette betyr at det alltid vil være syklonsk sirkulasjon når vi betrakter sirkulasjonen på tvers av en temperaturfront (se f.eks. figur 8.8 i Marshall & Plumb, 2008).

2.14 Avvik fra geostrofi grunnet friksjon (§7.4)

Svakt avvik fra geostrofi kalles ageostrofi. Ageostrofisk strøm betegnes \mathbf{u}_{ag} , hvor a -en viser til avvik, tilsvarende som i ordene atypisk, amoralsk, etc.

Fra momentumligningen (115) er balansen mellom trykk-, Coriolis- og friksjonsleddene gitt ved

$$\frac{1}{\rho} \nabla p + f \hat{\mathbf{z}} \times \mathbf{u} = \mathcal{F}_{\text{frik}} \quad (298)$$

hvor $\mathcal{F}_{\text{frik}}$ betegner friksjonskraft per enhetsmasse.

I ligning (298) er hastigheten \mathbf{u} lik summen av geostrofisk strøm \mathbf{u}_g (som vi får når $\mathcal{F}_{\text{frik}} = 0$) og avvik fra geostrofi grunnet friksjon \mathbf{u}_{ag} . Kraftbalansen i (298) kan da skrives som

$$\frac{1}{\rho} \nabla p + f \hat{\mathbf{z}} \times (\mathbf{u}_g + \mathbf{u}_{ag}) = \mathcal{F}_{\text{frik}} \quad (299)$$

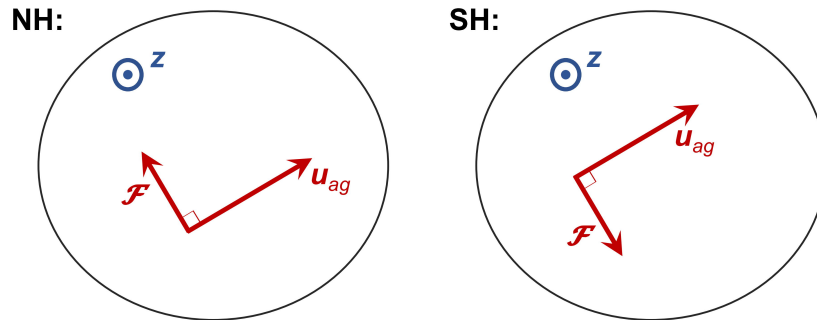
Siden summen ($\mathbf{u}_g + \mathbf{u}_{ag}$) forekommer lineært i (299), kan ligning (299) splittes i én ligning for \mathbf{u}_g og én for \mathbf{u}_{ag} :

$$\frac{1}{\rho} \nabla p + f \hat{\mathbf{z}} \times \mathbf{u}_g = \mathbf{0} \quad (300)$$

$$f \hat{\mathbf{z}} \times \mathbf{u}_{ag} = \mathcal{F}_{\text{frik}} \quad (301)$$

En sjekk på dette er at summen av de to ligningene over er identisk med ligning (299).

Mens ligning (300) er den geostrofiske kraftbalansen, kan vi bruke høyrehåndsregelen for å finne orienteringen av \mathbf{u}_{ag} relativt til $\mathcal{F}_{\text{frik}}$ fra (301). Se fig. 298 for en illustrasjon på dette. Det følger



Figur 35: Orientering av \mathbf{u}_{ag} relativt til $\mathcal{F}_{\text{frik}}$ på den nordlige halvkule (venstre) og sørlige halvkule (høyre). $\hat{\mathbf{z}}$ er den vertikale enhetsvektoren, rettet ut av papirplanet.

da at \mathbf{u}_{ag} er rettet til høyre for $\mathcal{F}_{\text{frik}}$ på den nordlige halvkule og til venstre for $\mathcal{F}_{\text{frik}}$ på den sørlige halvkule.

2.14.1 Orientering til \mathbf{u} når det virker friksjon

Friksjonen $\mathcal{F}_{\text{frik}}$ virker *bremsende uten å endre retningen* til \mathbf{u} . Følgelig er $\mathcal{F}_{\text{frik}}$ rettet motsatt av \mathbf{u} .

For å finne orienteringen til \mathbf{u} når det virker friksjon, kan vi ta utgangspunkt i kraftbalansen (298). Fra utledningen av de fysiske kreftene, vet vi at trykk- og Coriolisleddene skal ha *negativt* fortegn. Dette betyr at det er hensiktsmessig (dvs. fysisk korrekt) å uttrykke (298) på formen

$$-\frac{1}{\rho} \nabla p - f \hat{\mathbf{z}} \times \mathbf{u} + \mathcal{F}_{\text{frik}} = \mathbf{0} \quad (302)$$

Tilsvarende som for analysen av geostrofisk strøm (se forelesningsnotater!), kan ligning (302) kan skrives på formen

$$\mathbf{a} + \mathbf{b} = \mathbf{0} \quad (303)$$

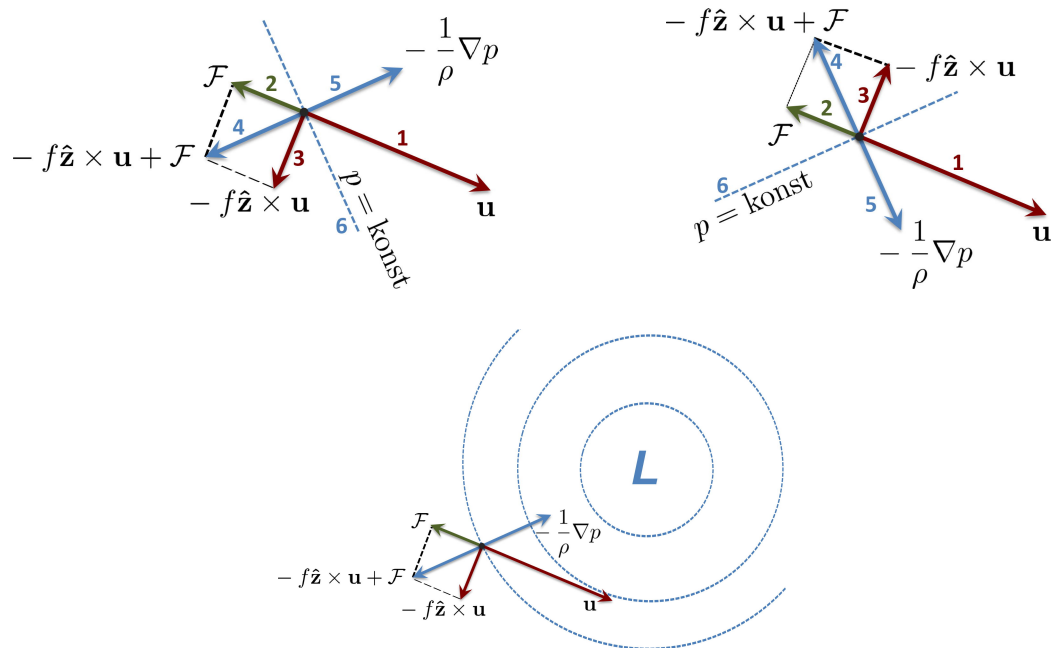
hvor vi kan velge

$$\mathbf{a} = -\frac{1}{\rho} \nabla p \quad (304)$$

$$\mathbf{b} = -f \hat{\mathbf{z}} \times \mathbf{u} + \mathcal{F}_{\text{frik}} \quad (305)$$

Fra (303) følger det at $|\mathbf{a}| = |\mathbf{b}|$, og at \mathbf{a} og \mathbf{b} er motsatt rettet. Vi benytter dette, med \mathbf{a} og \mathbf{b} fra uttrykkene over, for analysere kraftbalansen i (302).

Dersom vi starter med hastighetsvektoren \mathbf{u} og vi benytter at $\mathcal{F}_{\text{frik}}$ er motsatt rettet av \mathbf{u} , kan størrelsene og leddene i (302) skisseres, steg for steg, som vist i figur 36.



Figur 36: Illustrasjon av orientering til størrelsene og leddene i (302) for den nordlige halvkule (venstre, oppe) og den sørlige halvkule (høyre, oppe). En logisk måte å se dette på er å følge nummereringen fra 1 til 6, hvor \mathbf{b} er benyttet i steg 4, og at \mathbf{a} og \mathbf{b} er like store men motsatt rettet er benyttet i steg 5 (se tekst). Den nederste figuren er som figuren oppe til venstre, illustrert med et lavtrykk på den nordlige halvkule.

Siden trykkleddet (steg nr. 5 i figur 36) er rettet mot lavere trykk, viser figuren at *virkingen av friksjon er at \mathbf{u} er rettet mot lavere trykk*. Avviket fra geostrofi (hvor \mathbf{u}_g hadde vært rettet langs isobarene $p = \text{konst.}$) er sterkt overdrevet i figuren, men figuren gir like fullt ut orientering til de ulike størrelsene.

2.14.2 Uttrykk for friksjon

En ofte benyttet sammenheng for å beskrive friksjon i atmosfære og hav er uttrykket

$$\mathcal{F}_{\text{frik}} = -\frac{k}{\delta} \mathbf{u} \quad (306)$$

Her er k (m/s) friksjonskoeffisient og δ (m) tykkelse til friksjonslaget, ofte kalt Ekman-laget. Både k og δ er empirisk bestemte størrelser (men de kan også utledes fra turbulenteori).

2.14.3 Virkning av friksjon

Med friksjonsleddet skrevet på formen (306) kan kraftbalansen (298) skrives på komponentform

$$\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} - f v = -\frac{k}{\delta} u \quad (307)$$

$$\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial y} + f u = -\frac{k}{\delta} v \quad (308)$$

Dersom vi orienterer vårt koordinatsystem slik at x -aksen er rettet langs isobarene ($p = \text{konst.}$), vil y -aksen stå normalt på isobarene.

Med dette valget er $\partial p / \partial x = 0$, slik at (307) gir

$$\boxed{v = \frac{k}{f\delta} u} \quad (309)$$

Følgelig har v samme fortegn som u på den nordlige halvkule, motsatt fortegn på den sørlige halvkule.

Med (309), kan u bestemmes fra (308)

$$\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial y} + f u = -\frac{k^2}{f\delta^2} u \quad (310)$$

Divisjon av f (som er ok siden vi holder oss borte fra ekvator), og med å samle leddene som inneholder u , gir

$$\boxed{u = -\frac{1}{1 + \frac{k^2}{f^2\delta^2}} \frac{1}{f\rho} \frac{\partial p}{\partial y}} \quad (311)$$

Sammenlignet med standard uttrykk for geostrofi,

$$u_g = -\frac{1}{f\rho} \frac{\partial p}{\partial y} \quad (312)$$

ser vi at $u_g > u$, som er som forventet siden friksjon virker bremsende på bevegelsen.

Oppsummert: Friksjon fører til et avvik fra geostrofi ved at farten reduseres, og at hastighetsvektoren rettes svakt mot lavere trykk. Det er det siste som gjør at det er konvergens i sentrum av et lavtrykk og divergens i sentrum av et høytrykk nær bakken.

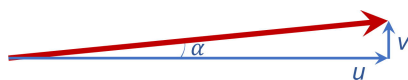
2.14.4 Estimert avvik fra geostrofi

For atmosfæren, på midlere breddegrader, gjelder typisk

$$\begin{aligned} \delta &= 10^3 \text{ m} \\ k &= 10^{-2} \text{ m/s} \\ f &= 10^{-4} \text{ 1/s} \end{aligned}$$

Dette gir

$$\frac{k}{f\delta} \sim 0.1 \quad (313)$$



Figur 37: Illustrasjon av de to hastighetskomponentene u og v med $v \sim 0.1u$, og vinkelen α mellom de.

Fra (309) betyr dette at

$$v \sim 0.1u \quad (314)$$

Situasjonen er vist i figur 37.

Det følger da at avviket fra geostrofi er gitt ved

$$\tan \alpha = \frac{v}{u} \sim 0.1, \text{ eller } \alpha \sim 6^\circ \quad (315)$$

I dette tilfellet vil altså hastighetsvektoren, relativt til isobarene, være rettet 6° mot lavere trykk.

2.15 Kystkonvergens

Friksjonskoeffisienten k er størst hvor en væske strømmer over eller forbi en ru grenseflate. For atmosfæren er friksjonskoeffisienten størst over land, hvor ruhet grunnet vegetasjon og høydeendringer i topografien kan være stor, og minst over åpent (og stille) hav. Dette gir opphav til *kystkonvergens*, som forklart i figur 38.

2.16 Kontinuitetsligningen i trykk-kordinater (§6.3.2)

Kontinuitetsligningen med z (eller geopotensialhøyde) som vertikal koordinat kan skrives på formen

$$\frac{D\rho}{Dt} + \rho \nabla \cdot \mathbf{u} = 0 \quad (316)$$

hvor $D\rho/Dt$ er den totalderiverte av ρ , altså tidsvariasjon av ρ når vi følger med bevegelsen.

For en *inkompressibel* væske som vann vil tettheten ikke endre seg med bevegelsen, slik at $D\rho/Dt = 0$. Fra ligningen over følger det da at $\nabla \cdot \mathbf{u} = 0$, altså at strømmen er divergensfri. Divergensfri strøm letter analysen av et problem da det ikke eksisterer kilder eller sluk for en slik strøm, i vårt tilfelle på flater med $z = \text{konst}$.

For en *kompressibel* væske som luft vil derimot tettheten generelt endre seg med bevegelsen slik at $D\rho/Dt \neq 0$, og følgelig $\nabla \cdot \mathbf{u} \neq 0$. Men det er mulig å omskrive kontinuitetsligningen (316) til en form slik at vi får divergensfri strøm også for en kompressibel væske. Vi innfører da trykk som vertikal koordinat.

2.16.1 Utledning

Et masselement δM_z i nivåkoordinater (z -koordinater) kan skrives på formen

$$\delta M_z = \rho \delta x \delta y \delta z \quad (317)$$

Her er ρ tetthet og $\delta x, \delta y, \delta z$ er utstrekningen av et tenkt væskeelementet i x, y, z retningene.

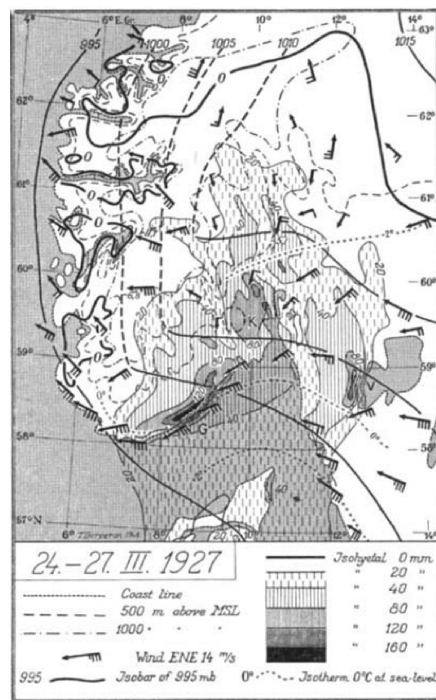
Store nedbørsmengder på Sørlandskysten skyldes (ofte) kystkonvergens

Oppstår hvor vinden blåser langs, eller svakt mot, en lang rettlinjet kyst, med land til høyre, og lavt trykk til venstre (på den nordlige halvkule).

Friksjon fører til at vinden dreier mot lavere trykk, dvs. til venstre, nede i atmosfæren.

Størst friksjon over land, dvs. sterkest dreining mot venstre, over land.

Luft presses sammen og følgelig opp i atmosfæren i et belte langs kysten (konvergens) → nedkjøling → nedbør langs kysten



Bergeron, *Tellus* (1949), Holmebakken & Grønås (2005)

Figur 38: Illustrasjon og forklaring av kystkonvergens. Figuren viser bl.a. nedbør (skravert) for perioden 24.-27. mars 1927, med store nedbørsmengder langs Sørlandskysten. Figur fra Bergeron (1949).

Når vi går fra z - til p -koordinater, betyr dette at

$$z = z(p) \quad (318)$$

og følgelig at

$$\delta z = \frac{\partial z}{\partial p} \delta p \quad (319)$$

Hydrostatisk ligning gir

$$\frac{\partial p}{\partial z} = -\rho g \quad \text{eller} \quad \rho = \left(-\frac{1}{g}\right) \frac{\partial p}{\partial z} \quad (320)$$

På diskret form kan siste sammenheng i (320) skrives

$$\rho = \left(-\frac{1}{g}\right) \frac{\delta p}{\delta z} \quad (321)$$

Ved å sette (321) inn i (317) får vi *masselementet uttrykt i trykk-koordinat* (p -koordinat)

$$\delta M_p = \left(-\frac{1}{g}\right) \delta x \delta y \delta p \quad (322)$$

M_p er altså et væskeelement på isobarflater, dvs. på flater med $p = \text{konst.}$

Bevaring av væskeelementet δM_p med bevegelsen – som er prinsippet om at masse er bevart – betyr at δM_p ikke endrer seg med bevegelsen (på en flate med $p = \text{konst.}$):

$$\left. \frac{D}{Dt}(\delta M_p) \right|_p = 0 \quad (323)$$

Ved å sette inn uttrykket for δM_p (fra 322) inn i (323), samt å dividere med δM_p , gir

$$\frac{-g}{\delta x \delta y \delta p} \frac{D}{Dt} \left[\left(-\frac{1}{g}\right) \delta x \delta y \delta p \right]_p = 0 \quad (324)$$

Den totalderiverte virker på δx , δy og δp , som gir

$$\frac{1}{\delta x \delta y \delta p} \left[\delta y \delta p \frac{D}{Dt}(\delta x) + \delta x \delta p \frac{D}{Dt}(\delta y) + \delta x \delta y \frac{D}{Dt}(\delta p) \right]_p = 0 \quad (325)$$

Siden derivasjonsrekkefølgen kan byttes om for enhver kontinuerlig deriverbar (glatt) størrelse¹⁶, gjelder

$$\frac{D}{Dt}(\delta x) = \delta \left(\frac{Dx}{Dt} \right) \quad (326)$$

og tilsvarende for y og p .

Uttrykk (325) kan derfor skrives som

$$\frac{1}{\delta x} \delta \left(\frac{Dx}{Dt} \right)_p + \frac{1}{\delta y} \delta \left(\frac{Dy}{Dt} \right)_p + \frac{1}{\delta p} \delta \left(\frac{Dp}{Dt} \right)_p = 0 \quad (327)$$

¹⁶Vi kan se på δ som en derivert, siden δ beskriver en liten endring. Fra vektoranalysen vet vi videre at derivasjonsrekkefølgen er uten betydning for en glatt funksjon.

Merk at alt fra og med uttrykk (322) gjelder på flater med $p = \text{konst.}$, inkludert uttrykket over.

Tidsendring av posisjonene x, y – når vi følger med bevegelsen på flater med $p = \text{konst.}$ – gir hastighetskomponentene u, v (på flater med $p = \text{konst.}$):

$$\frac{Dx}{Dt} = u \quad \text{og} \quad \frac{Dy}{Dt} = v \quad (328)$$

Videre definerer vi ω :

$$\frac{Dp}{Dt} \equiv \omega \quad (329)$$

ω spiller rollen til vertikal fart. En forklaring på det siste er at dersom p avtar med tiden når vi følger med bevegelsen, så er dette ensbetydende med at vi beveger oss oppover i væsken, i retning mot lavere trykk. Altså en vertikal bevegelse.

De tre uttrykkene for den totalderiverte over, innsatt i (327), gir

$$\frac{1}{\delta x} \delta u \Big|_p + \frac{1}{\delta y} \delta v \Big|_p + \frac{1}{\delta p} \delta \omega \Big|_p = 0 \quad (330)$$

eller, når $\delta \rightarrow 0$,

$$\left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} \right)_p + \frac{\partial \omega}{\partial p} \Big|_p = 0 \quad (331)$$

hvor altså $\omega = Dp/Dt$.

Uttrykket over kan skrives som

$$\boxed{\nabla_p \cdot \mathbf{u}_p = 0} \quad (332)$$

Dette er kontinuitetsligningen for en kompressibel væske uttrykt med trykk som vertikal koordinat. I dette tilfellet er strømmen *divergensfri*, og væskens vertikale «fart» er gitt ved hvordan trykket p endrer seg med bevegelsen ($\omega = Dp/Dt$).

2.17 Vertikal bevegelse grunnet friksjon i et lav- eller høytrykk

Vi kan nå anvende kontinuitetsligningen i trykk-koordinater, uttrykk (332), til å beskrive vertikal bevegelse i et lav- eller høytrykk. Uttrykk (332) kan også skrives på formen

$$\nabla_p \cdot \mathbf{u}_H + \frac{\partial \omega}{\partial p} = 0 \quad (333)$$

Her er horisontal hastighet (dvs. hastighet på isobarflater) \mathbf{u}_H gitt ved summen av geostrofisk og ageostrofisk hastighet:

$$\mathbf{u}_H = \mathbf{u}_g + \mathbf{u}_{ag} \quad (334)$$

\mathbf{u}_H innsatt i (333) gir

$$\left(\frac{\partial u_g}{\partial x} + \frac{\partial v_g}{\partial y} \right)_p + \left(\frac{\partial u_{ag}}{\partial x} + \frac{\partial v_{ag}}{\partial y} \right)_p + \frac{\partial \omega}{\partial p} = 0 \quad (335)$$

Fra standard uttrykk for geostrofisk strøm i trykk-koordinater, se (180), og med antagelsen om at f varierer lite i meridional retning, følger det at første parentes er lik null i uttrykket over. Følgelig gjelder

$$\frac{\partial \omega}{\partial p} = -\nabla_p \cdot \mathbf{u}_{ag} \quad (336)$$

Fra vektoranalysen har vi *konvergens* når

$$\nabla_p \cdot \mathbf{u}_{ag} < 0 \quad (337)$$

og *divergens* når

$$\nabla_p \cdot \mathbf{u}_{ag} > 0 \quad (338)$$

I Ekman-laget i et lavtrykk, som typisk strekker seg over de nederste 500–1000 m av luftsøylen, vil det være et konvergent hastighetsfelt som en følge av friksjon (se avsnitt 2.14.3). Med $\nabla_p \cdot \mathbf{u}_{ag} < 0$ i (336), må

$$\frac{\partial \omega}{\partial p} > 0 \quad (339)$$

Siden p avtar med høyden, må da også ω avta med høyden. Og siden $\omega = Dp/Dt$, må p avta med tiden når vi følger med bevegelsen. Som betyr at luften beveger seg oppover.

Konvergens mot bakken i et lavtrykk fører altså til stigende luft sentralt i lavtrykket, som forventet.

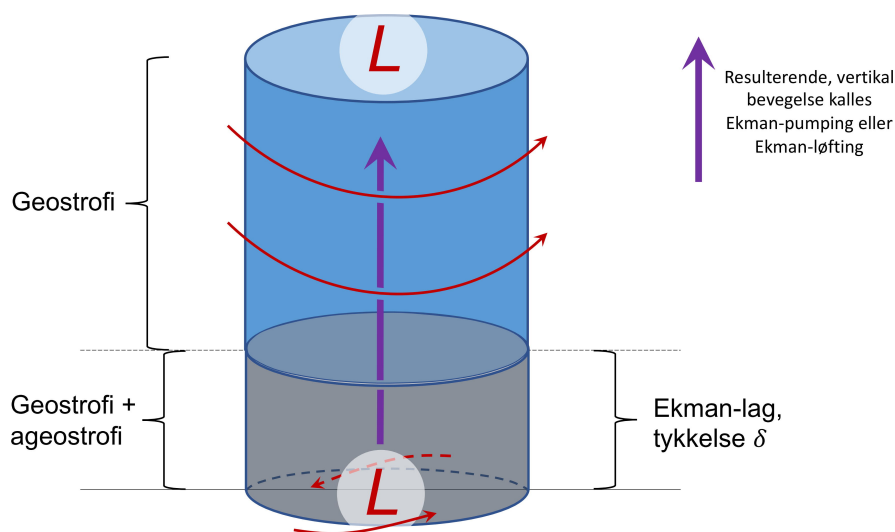
At dette følger fra (333) er ikke opplagt ved første øyekast, men det kan altså forstås med litt analyse. Stigende luft (eller vann) grunnet friksjon kalles ofte Ekman-pumping eller Ekman-løfting. Se også figur 39.

Tilsvarende for et høytrykk: Her vil

$$\frac{\partial \omega}{\partial p} < 0 \quad (340)$$

i Ekman-laget mot bakken. Siden p avtar med høyden, må ω i dette tilfellet øke med høyden. Og siden $\omega = Dp/Dt$, må p øke med tiden når vi følger med bevegelsen. Som betyr at luften beveger seg nedover. Som forventet.

Konvergens mot bakken i et høytrykk fører altså til fallende luft sentralt i høytrykket. Fallende luft (eller vann) grunnet friksjon kalles ofte Ekman-senkning.



Figur 39: Illustrasjon av et idealisert lavtrykk med geostrofisk balanse over Ekman-laget med tykkelse δ , og et ageostrofisk bidrag i Ekman-laget grunnet friksjon. Geostrofisk strøm vil være rettet rundt lavtrykket i en evig runddans. Ageostrofisk strøm er rettet mot sentrum av lavtrykket, som gir konvergens i Ekman-laget. Konvergerende luft vil da løftes i lavtrykket, ofte kalt Ekman-pumpling eller Ekman-løfting.

3 Atmosfærens generelle sirkulasjon (§8)

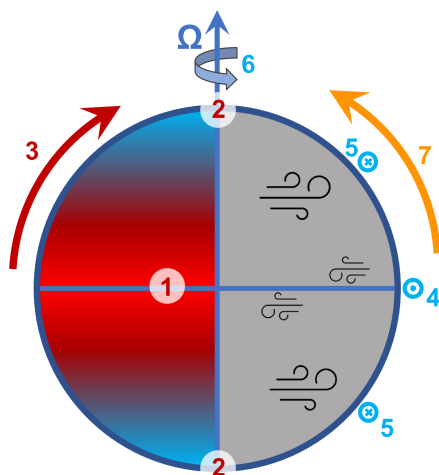
3.1 Motivasjon (§8.1)

Én av flere føringer på bevegelsen i atmosfæren (se avsnitt 1.1) er at atmosfærens sirkulasjon må sikre transport av *varme* og *sonalt momentum* fra lave til høyere breddegrader (det samme gjelder for havet, men dette kommer vi tilbake til senere).

Vessentlig forskjellige mekanismer er involvert for området fra rundt 30° S til 30° N (området til de to Hadley-cellene) og på høyere breddegrader. Dette kan dels forstås med Coriolis-effektens variasjon med breddegrad; at den er fraværende på ekvator og liten på lave breddegrader, og økende på høye breddegrader. Rossby deformasjonsradius R_p (se avsnitt 2.12.6) indikerer også vesentlig forskjellig dynamikk som funksjon av breddegrad siden $R_p \rightarrow \infty$ når breddegrad $\varphi \rightarrow 0$.

Figur 40 illustrerer føringene for transport av varme på venstre side og transport av sonalt momentum på høyre side av rotasjonsaksen. Basert på nummerering fra figuren, har vi

1. Netto oppvarming i tropene, men stabil (høy) temperatur.
2. Netto nedkjøling mot polene, men stabil (lav) temperatur.
3. Varmetransport fra tropene mot polene i atmosfære (og hav).
4. Østlig vind sør for ca. 30° breddegrad, eller at luften beveger seg langsommere enn jorden. Grunnet friksjon får da atmosfæren tilført (vestlig) sonalt momentum. Dette virker *bremsende på jordens rotasjon*.
5. Vestlig vind nord og sør for ca. 30° breddegrad, eller at atmosfæren overfører (vestlig) sonalt momentum til jorden. Dette virker *akselererende på jordens rotasjon*.



Figur 40: Grunnleggende faktorer for atmosfærens varme- og momentumtransport, illustrert på hhv. venstre og høyre side av jordrotasjonsaksen. Se tekst for forklaring av de ulike faktorene (som er identiske på den nordlige og sørlige halvkule).

6. Jordens rotasjonsrate Ω er konstant, så friksjonsvirkningen av vestlig og østlig sonalt momentum mellom atmosfære og hav *må* gå i null.
7. Det må være transport av sonalt momentum fra vest mot øst i atmosfæren når vi går fra tropene mot høyere breddegrader.

Punktene 4 og 5 er skissert i figur 41.

I det følgende betrakter vi atmosfæresirkulasjonen for $|\varphi| \lesssim 30^\circ$ og $|\varphi| \gtrsim 30^\circ$.

3.2 Hadley-cellenes meridionale utstrekning, $|\varphi| \lesssim 30^\circ$ (§8.2)

Vi betrakter en (tenkt) ring av luft rundt jorden ved ca. 200 hPa (ved tropopausen, eller ved overgangen mellom troposfæren og stratosfæren). Vi kan ser bort fra friksjon. Da er spinn – og spinn per enhetsmasse A – bevart, se avsnitt 2.12.3:

$$|A| = \text{konst.} \quad \text{eller} \quad A = R^2 \Omega + R u \quad (341)$$

Her er Ω jordens rotasjonsrate, R er avstanden fra jordens rotasjonsakse til en luftpakke, og u er luftpakkens sonale fart (se figur 42).

Fra figur 42 følger det at

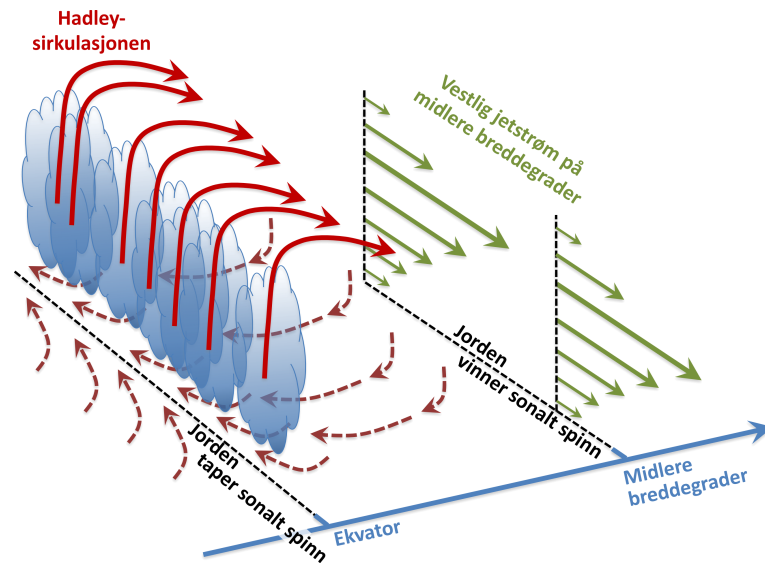
$$\cos \varphi = \frac{R}{a} \quad (342)$$

som betyr at A , fra (341), kan skrives som

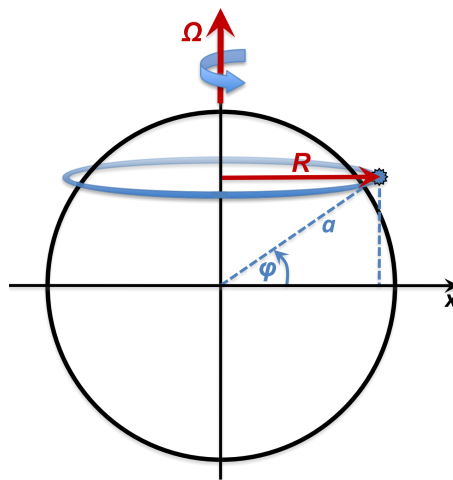
$$A(\varphi) = \Omega a^2 \cos^2 \varphi + u a \cos \varphi \quad (343)$$

Luftens sonale fart ved ekvator er liten, så $u_{\varphi=0} \approx 0$, så

$$A_{\varphi=0} = \Omega a^2 \quad (344)$$



Figur 41: Skisse av atmosfæresirkulasjonen ved ekvator og på midlere breddegrader. De rødstiplede pilene viser vindretning ved overflaten. Grunnet friksjon mellom atmosfære og jord, virker østlig vind ved lave breddegrader *bremsende*, mens vestlig vind på høyere breddegrader virker *akselererende* på jordens spinn.



Figur 42: Illustrasjon av en tenkt ring av luft som omslynger jorden på breddegrad φ . R er avstand fra jordens rotasjonsakse til luftpakken og a er jordens radius (siden atmosfæren er som et tynt lag rundt jorden, kan radiell avstand fra jordens sentrum til luftpakken tilnærmes med a).

Siden $A = \text{konst.}$, må $A(\varphi) = A_{\varphi=0}$, eller

$$\Omega a^2 \cos^2 \varphi + u a \cos \varphi = \Omega a^2 \quad (345)$$

Løser vi for u , får vi

$$u(\varphi) = \frac{\Omega a^2(1 - \cos^2 \varphi)}{a \cos \varphi} \quad (346)$$

eller

$$\boxed{u(\varphi) = \Omega a \frac{\sin^2 \varphi}{\cos \varphi}} \quad (347)$$

Det følger fra (347) at $u > 0$ for alle $|\varphi| > 0$, altså for begge halvkuler. Dette følger direkte fra bevaring av spinn, f.eks. fra uttrykk (341): Når ringen av luft beveges fra ekvator reduseres R , og siden $A = \text{konst.}$ må u øke.

Videre ser vi fra (347) at $u(\varphi) \rightarrow \infty$ når $|\varphi| \rightarrow \pi/2$, så *prinsippet om bevaring av spinn forteller at en hemisfærisk Hadley-celle er umulig på en roterende planet.*

Hadley-cellenes maksimale meridionale utstrekning kan estimeres ved å sette inn gradvis økende verdier for φ i (347):

$$\begin{aligned} |\varphi| = 10^\circ & \quad \text{gir} \quad u = 14 \text{ m/s} \\ |\varphi| = 20^\circ & \quad \text{gir} \quad u = 58 \text{ m/s} \\ |\varphi| = 30^\circ & \quad \text{gir} \quad u = 130 \text{ m/s} \end{aligned} \quad (348)$$

Vi vet at den tropiske jetstrømmen har en fart på rundt 40 m/s. Sammenlignet med verdiene av sonal hastighet i (348) betyr dette at Hadley-cellenene, basert på bevaring av spinn, ikke kan ha en meridional utbredelse på mer enn rundt 20° . Siden det alltid vil være noe friksjon, og siden det er svak østlig vind ved ekvator (ikke vindstille som antatt over), betyr dette at Hadley-cellenene kan strekke seg til rundt 30. breddegrad, men ikke nord eller sør for dette.

Videre ser vi fra (347) at Hadley-cellenes utstrekning avhenger av Ω og a , slik at en planet som roterer raskere eller langsommere enn jorden, eller som har større eller mindre radius enn jorden, vil ha en annen meridional utstrekning av Hadley-cellenene enn hva som er tilfellet for jorden.

3.2.1 Hadley-cellenes utstrekning basert på ulike fysiske prinsipper

Teorien i avsnitt 3.2 er basert på prinsippet om bevaring av spinn. Vi kan kalle dette en *dynamisk*, eller *kinetisk*, føring.

Videre har vi at luften ved tropopausen er svært kald, og temperaturen vil falle ettersom luften beveger seg nord- eller sørover fra ekvator grunnet varmestråling til verdensrommet. Ved rundt $\pm 30^\circ$ er luften svært kald – og den har med det høy tetthet – slik at den vil synke i atmosfæren. Dette er en *termodynamisk føring* på Hadley-cellenes utstrekning.

Betrakter vi modellen med luften i en ring rundt jorden og hvor ringens masse (eller volum) er bevart, forstår vi at ringens radius må raskt øke ettersom ringen beveger seg mot høyere breddegrader, dvs. mot mindre R . Skulle ringen nærme seg polpunktet ($\rightarrow \infty$) ville ringens radius gå mot uendelig siden massen er bevart. Dette er en umulighet. Vi kan kalle dette en *masseføring*.

Det er følgelig flere fysiske argumenter for at Hadley-cellene ikke kan ha en hemisfærisk utstrekning¹⁷.

3.2.2 Eksempel, sammenheng mellom spinnsatsen og sonal komponent av momentum-ligningen

Kommer...

3.3 Atmosfæresirkulasjonen utenfor Hadley-cellene, $|\varphi| \gtrsim 30^\circ$ (§8.2)

Mens Hadley-cellene representerer et sirkulasjonsregime som er furutsigbar og predikerbar (dvs. at sirkulasjonen kan betraktes som tilnærmet uendret over tid), er det vesentlig forskjellig dynamikk nord for ca. 30°N og sør for ca. 30°S .

Det kan vises (ikke pensum i GEO110) at atmosfæren med lett (varm) luft mot ekvator og tung (kald) luft mot polene er *dynamisk ustabil* for $|\varphi| \gtrsim 30^\circ$. I dette regimet vil *enhver forstyrrelse kunne vokse og føre til virvler*. Disse virvlene, høy- og lavtrykk i atmosfæren, må da ha den egenskap at disse bringer varme og sonalt momentum mot høyere breddegrader.

Dette betyr at atmosfærens høy- og lavtrykk verken har tilfeldig form eller at bevegelsen til luftpartiklene som danner disse systemene er tilfeldig.

Sentrale spørsmål er:

1. Hvor henter høy- og lavtrykkene bevegelsesenergien (dvs. kinetisk energi) fra?
2. Hvordan kan høy- og lavtrykk bringe sonalt momentum mot polene?

Det siste punktet betyr f.eks. at høy- og lavtrykk *ikke* kan være perfekt runde, da sirkelbevegelse ikke kan forflytte sonalt momentum nordover på den nordlige halvkule og sørover på den sørlige halvkule.

For å belyse punktene over teoretisk, betrakter vi i det følgende

1. balansen mellom tilgjengelig potensiell energi (*APE*, *available potential energy*¹⁸) og kinetisk energi (*KE*), og
2. avvik fra sonal strøm.

Det er hensiktsmessig å betrakte en luftpakkes *potensielle temperatur* θ for å se på overstående, derfor noen ord om potensiell temperatur, sammenlignet med *in situ* temperatur T , i de påfølgende avsnittene.

Merk: Hovedregelen er at storskala sirkulasjon i atmosfæren, når vi ser bort fra friksjon og når vi holder oss borte fra ekvator, dvs. geostrofisk strøm, i hovedsak er todimensjonal og at den skjer på flater med konstant trykk, isobarflater. Disse flatene er tilnærmet (men ikke helt) horisontale.

For *synoptiske systemer* på midlere breddegrader (dvs. høy- og lavtrykk) er sirkulasjonen *tredimensjonal*, der den vertikale bevegelsen tenderer å følge flater med konstant potensiell temperatur, kalt *isentrop*.

¹⁷Hadley-cellene er oppkalt etter George Hadley som i 1735 postulerte at luft stiger ved ekvator for så å strømme mot polene hvor luften faller ned; altså to hemisfæriske sirkulasjonsceller, se https://no.wikipedia.org/wiki/George_Hadley.

¹⁸På norsk ville forkortelsen vært *TPE* (fra *tilgjengelig potensiell energi*), men vi bruker bokens *APE* i det følgende.

3.3.1 *In situ* temperatur T og potensiell temperatur θ (§4.3.2)

In situ er latin og betyr «på stedet»¹⁹. *In situ* temperatur T ($^{\circ}\text{C}$) betegner derfor den faktiske temperaturen en veskepartikkel har, målt der partikkelen til enhver tid befinner seg.

Potensiell temperatur θ er temperaturen til en luftpakke relativt til et fast trykk, ofte kalt et referansetrykk. Dersom referansetrykket er ved bakken, vil da veskepartikkelens potensielle temperatur være den temperaturen den ville hatt dersom partikkelen ble ført til bakkenivå, uten at partikkelen får tilført varme fra, eller avgir varme til, omgivelsene. Når det siste er tilfellet sier vi at partikkelen blir ført til bakkenivået *adiabatisk*.

Forskjellen mellom *in situ* og potensiell temperatur er altså at vi fjerner trykkets virkning på en veskepartikkels temperatur når vi opererer med potensiell temperatur.

Dersom vi betrakter to identiske luftpakker, dvs. luftpakker med lik *in situ* temperatur og likt trykk, og vi antar at enhver bevegelse skjer adiabatisk, har vi følgende: Dersom den ene luftpakken senkes i atmosfæren, vil luftpakkens *in situ* temperatur øke siden trykket øker. Dette følger fra den ideelle gasslov (5). Løftes luftpakken tilbake til dens initielle posisjon, vil den få identisk *in situ* temperatur med hva den startet ut med. Partikkelens potensielle temperatur, relativt til initelt trykk, vil derimot forbli forandret under bevegelsen.

Basert på det overstående kan vi si at endringer i en luftpakkes temperatur skyldes to faktorer: Den ene skyldes oppvarming eller nedkjøling grunnet f.eks. stråling, den andre skyldes at partikkelen har en bevegelse i vertikalen (dvs. at trykket endrer seg). Det er den første faktoren som gir informasjon om partikkelens termodynamiske tilstand; den andre faktoren er en «passiv» respons på vertikal forflytting og vil kanselleres så snart partikkelen kommer tilbake til initielt trykk.

Det er hensiktsmessig å betrakte potensiell temperatur θ for å beskrive bevegelsen i atmosfæren. Dette da bevegelsen tenderer å følge flater med konstant θ , også kalt *isentrop*.

Holdes trykket konstant, gir den ideelle gasslov (5) at det er en invers sammenheng mellom potensiell temperatur og partikkelens tetthet. Siden enhver luftpakke vil (i hovedsak) bevege seg på falter med konstant tetthet (siden enhver vertikal forskyvning vil gi opphav til oppdrift- eller gravitasjonskraft i en stratifisert væske), forstår vi at luftpakkene vil (i hovedsak) bevege seg på isentropiske flater.

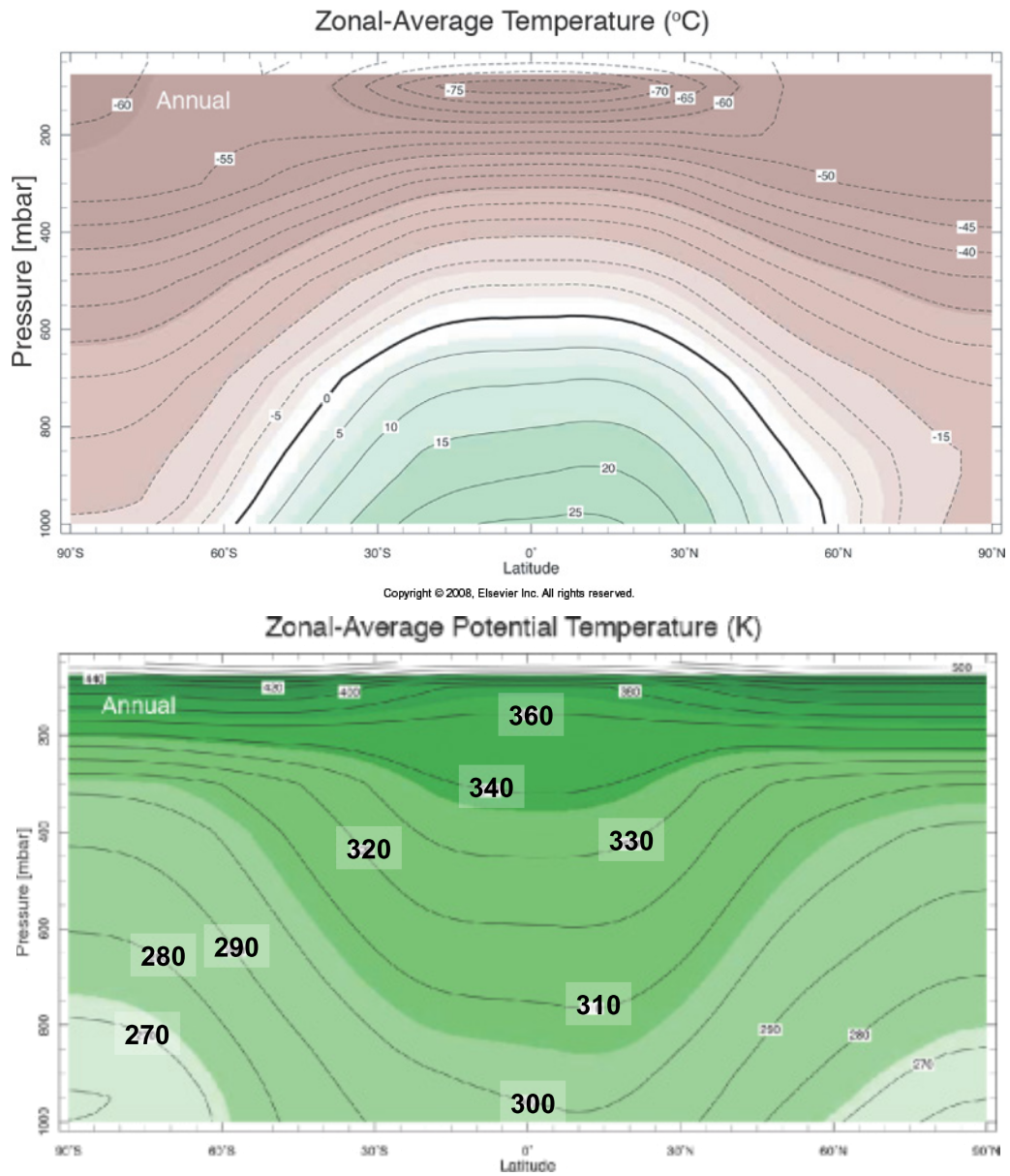
3.3.2 Fra *in situ* til potensiell temperatur (§5.1.4)

Global, årlig sonal *in situ* og potensiell temperatur er vist i figur 43. Mens *in situ* temperatur er høyest ved bakkenivå og på lave breddegrader, øker potensiell temperatur med økende høyde og den avtar med økende breddegrad. Forskjellen mellom de to panelene (i tillegg til ulike enheter) er kun virkningen trykket har på en luftpakkes *in situ* temperatur.

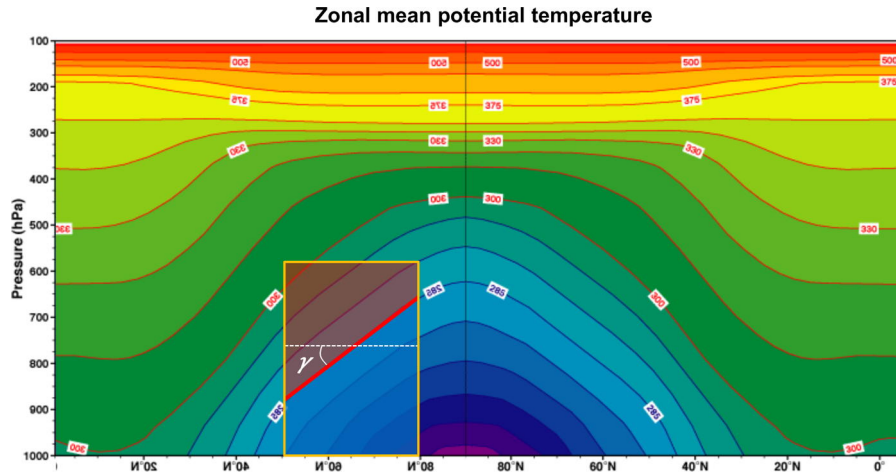
Som beskrevet over tenderer luftpakkene å følge isentropene i det nederste panelet i figur 43. Vi er da tilbake til utgangspunktet for Margules sammenheng som illustrert med figur 30. Isentropene i figur 30 kan sees på som skilleflater mellom luftpakker med ulik tetthet.

I et idealisert tilfelle med to luftmasser, med en kald og tung væske mot polpunktet og en varmere og lettere luftmasse mot lavere breddegrader, kan de to luftmassene betraktes som separert med det heltrukne, røde linjestykket i figur 44. Vi vil benytte dette i det følgende.

¹⁹Det er vanlig å skrive latin med kursiv skrift, derfor er skrivemåten «*in situ* temperatur» det vanlige.



Figur 43: Årlig, sonalt midlet *in situ* temperatur (°C; øverst) og potensiell temperatur (K; nederst) for trykkintervallet 1000 til 100 mbar (figur 5.7 og 5.8 i M&P).



Figur 44: Reanalyse fra det Europeiske værvarslingssenteret av sonalt midlet potensiell temperatur, speilvendt om nordpolen. Isentropene kan sees på som skilleflater for ulike luftmasser. I en tolags modell kan vi velge en isentrope (i dette tilfellet 285 K, rød linje) til å skille kald og tung væske (blå skravering) med varmere og lettere væske (rød skravering). Skillelinjen mellom de to luftmassene har en helning γ relativt til horisontalplanet. Den gule rammen illustrerer tolagsmodellen vist i figur 45. Figur fra https://software.ecmwf.int/static/ERA-40_Atlas/docs/section_D25/parameter_zmpttp.html.

3.3.3 Kommentar: Potensiell og kinetisk energi i en tolagsmodell

Utledningen av uttrykk for potensiell og kinetisk energi i en tolagsmodell i de følgende avsnittene gjelder for både for luft og vann, altså både for atmosfære og hav. For atmosfæren benyttes isolinjer for potensiell temperatur (isentropen) for å angi skilleflaten i modellen; for hav benyttes isolinjer for potensiell tetthet (isopyknaler).

3.3.4 Potensiell energi til en væske (§8.3.1)

Potensiell energi til et system er gitt ved produktet mgh , der m er massen, g er gravitasjonskonstanten og h er en høyde i gravitasjonens retning (vertikal retning) som potensiell energi beregnes relativt til.

For en væskepakke med volum $dV = dx dy dz$ og tetthet ρ , kan potensiell energi for væskepakken dPE uttrykkes som

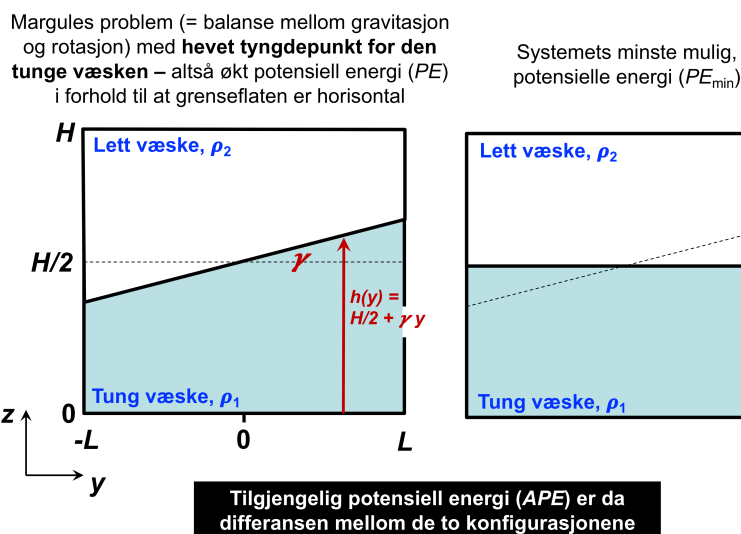
$$dPE = \rho dV g z = g z \rho dV \quad (349)$$

Her betegner z høyden som PE beregnes relativt til.

For en væske begrenset av et bestemt volum, vil potensiell energi for hele væsken være summen (som betyr integralet) av alle væskepartikler

$$PE = \int dPE = g \int z \rho dV \quad (350)$$

Her er integrasjonen over volumet V som avgrensner væsken.



Figur 45: Illustrasjon av en tolagsmodell med en tung væske væske med tetthet ρ_1 for $0 < z < h(y)$ og en lettere væske $\rho_2 < \rho_1$ for $h(y) < z < H$. Grenseflaten mellom væskene er gitt ved $z = h(y) = H/2 + \gamma y$, hvor γ er grenseflatens helning (dvs. stigningstall). Panelet til venstre tilsvare den gule rammen i figur 44, mens panelet til høyre viser systemets minste mulig, potensielle energi PE_{\min} . Basert på figur 8.9 i Marshall & Plumb (2008).

3.3.5 Beregning av potensiell energi for en tolags væskemodell (§8.3.2 og §A.1.2)

Potensiell energi per enhetslengde²⁰ for tolagsmodellen vist i figur 45, som tilsvare den gule boksen i figur 44, er gitt ved

$$PE = \int_0^H \int_{-L}^L g \rho z \, dy \, dz \quad (351)$$

Siden det er et sprang (dvs. en diskontinuitet) i tetthet mellom de to væskene, splittes integrasjonen i z -retningen i to intervaller, et fra $z = 0$ til $z = h(y)$ som inkluderer væsken med tetthet ρ_1 , og et fra $z = h(y)$ til $z = H$ som inkluderer væsken med tetthet ρ_2 .

Høyden til grenseflaten mellom de to væskene, $h(y)$, følger fra figur 45

$$h(y) = \frac{H}{2} + \gamma y \quad (352)$$

Her er γ (dimensjonsløs) grenseflatens stigningstall, dvs. $\gamma = \Delta z / \Delta y$, hvor $\Delta z, \Delta y$ viser til grenseflatens helning.

Med denne todelingen kan (351) skrives som

$$PE = \int_0^{h(y)} \int_{-L}^L g \rho_1 z \, dy \, dz + \int_{h(y)}^H \int_{-L}^L g \rho_2 z \, dy \, dz \quad (353)$$

²⁰Siden vårt problem er todimensjonalt, se figur 45, kan vi se bort fra x -retningen. Det er dette som menes med *potensiell energi per enhetslengde* siden vi kan se bort fra en retning, i dette tilfellet x -retningen.

Utleddning av integralene over krever litt algebra, men utledningen er ikke spesielt sentralt i GEOF110, så den er flyttet til appendiks C²¹.

Etter litt utregning følger det at (656) kan skrives som

$$PE = \frac{1}{3}\rho_1 g' \gamma^2 L^3 + \rho_1 \left(g - \frac{3g'}{4} \right) H^2 L \quad (354)$$

Minste potensiell energi fåes når grenseflaten i figur 45 er horisontal, dvs. for $\gamma = 0$

$$PE_{\min} = \rho_1 \left(g - \frac{3g'}{4} \right) H^2 L \quad (355)$$

Tilgjengelig potensiell energi (*available potential energy, APE*) er da

$$APE = PE - PE_{\min} = \frac{1}{3}\rho_1 g' \gamma^2 L^3 \quad (356)$$

3.3.6 Omtrentlig verdi til γ i grader

Verdi til γ kan f.eks. estimeres fra den røde skillelinjen i rammen i figur 44:

$$\tan \gamma = \frac{\Delta z}{\Delta y} \quad (357)$$

hvor $\Delta y, \Delta z$ er lengder i meter.

For hele den røde skilleflaten tilsvarer Δz høydeforskjellen mellom $p = 650$ hPa og $p = 900$ hPa. Disse trykkverdiene tilsvarer (ca.) 3400 m og 940 m over bakken²² med temperatur satt til 0 °C). Dette gir $\Delta z = 2460$ m.

Videre tilsvarer Δy en avstand på 30 breddegrader, eller $30 \cdot 111 \cdot 10^3$ m = 3.3×10^6 m.

Totalt gir dette

$$\tan \gamma = \frac{2460 \text{ m}}{3.3 \times 10^6 \text{ m}} = 7.5 \times 10^{-4} \quad (358)$$

Siden $\tan \gamma \approx \gamma$ for liten γ er

$$\gamma \approx 7.5 \times 10^{-4} \text{ rad} \quad \text{eller} \quad \gamma \approx 0.04 \text{ grader} \quad (359)$$

Helningen til isentropene er derfor (relativt) liten, og langt mindre enn hva figur 44 synes å vise.

3.3.7 Kinetisk energi til en væske (§8.3.2)

Kinetisk energi til et system er gitt ved produktet $(1/2)mu^2$, der m er masse og u er fart.

²¹Det noen skrivefeil i læreboken i utledningen av den potensielle energien for en tolagsmodell, dvs. i bokens §A1.2, side 296.

²²Fra <https://www.mide.com/air-pressure-at-altitude-calculator>.

3.3.8 Kinetisk energi i en tolags væskemodell (§8.3.2)

Assosiert med tolagsmodellen i figur 45 er det en termalvind. Margules sammenheng (267), for små γ slik at $\tan \gamma \approx \gamma$, gir

$$u_{g2} \approx \frac{g'\gamma}{f} \quad (360)$$

hvor vi har antatt at $u_{g2} \gg u_{g1}$, eller for enkelhets skyld, $u_{g1} \approx 0$.

Den kinetiske energien per enhetslengde (ser altså bort fra x -retningen) er da, for liten u_{g1} ,

$$\begin{aligned} KE &= \int_h^H \int_{-L}^L \frac{1}{2} \rho_2 u_{g2}^2 dy dz \\ &= \frac{1}{2} \rho_2 u_{g2}^2 \int_{-L}^L \int_{h(y)}^H dz dy \\ &= \frac{1}{2} \rho_2 u_{g2}^2 \int_{-L}^L \left(\frac{H}{2} - \gamma y \right) dy \\ &= \frac{1}{2} \rho_2 \left(\frac{g'\gamma}{f} \right)^2 HL \end{aligned} \quad (361)$$

Selv om uttrykket for u_{g2} har en y -avhengighet gjennom f , se (360), har vi sett bort fra denne avhengigheten i andre overgang i utledningen over. Dette er greitt siden denne y -avhengigheten er liten i forhold til de andre bidragene.

3.3.9 Forholdet mellom potensiell og kinetisk energi i en tolags væskemodell (§8.3.2)

Forholdet mellom APE og KE fra (356) og (361) er

$$\frac{APE}{KE} = \frac{2}{3} \frac{f^2 L^2}{g' H} \quad (362)$$

hvor vi har benyttet at $\rho_1 \approx \rho_2$.

Fra definisjonen av Rossby deformasjonsradius (289) følger det at

$$L_\rho^2 = \frac{g' H}{f^2} \quad (363)$$

(362) kan da forenkles til

$$\boxed{\frac{APE}{KE} = \frac{2}{3} \left(\frac{L}{L_\rho} \right)^2} \quad (364)$$

En tolagsmodell som benyttet over – det være se for atmosfære eller hav – gir at forholdet mellom tilgjengelig potensiell energi og kinetisk energi er proporsjonal med

$$\left(\frac{L}{L_\rho} \right)^2 \quad (365)$$

Merk at L er meridional utstrekning til tolagsmodellen, se figur 45, mens L_ρ (som er Rossby deformasjonsradius) er karakteristisk utstrekning til synoptiske systemer.

3.3.10 Verdi til forholdet mellom potensiell og kinetisk energi for atmosfære og hav (§8.3.2)

I atmosfæren er L typisk lengdeskala for sonalt midlet potensiell temperatur, som altså beskriver skilleflaten mellom to væsker med ulik tetthet i Margules sammenheng. Fra figur 44 kan vi ta isotropene fra 265 K til 295 K som (tenkt) skilleflate i Margules sammenheng. Disse istropene strekker seg fra rundt 35° N til 80° N, eller over en avstand på rundt 30–45 breddegrader, så $L \sim 3500 - 5000$ km. Videre kan Rossby deformasjonsradius $L_\rho \sim 700$ km i atmosfæren, for midlere breddegrader (dvs. typisk radius for et synoptisk system på midlere breddegrader). Totalt gir dette for atmosfæren på midlere breddegrader

$$\frac{APE}{KE} \sim 25 \text{ til } 50 \quad (366)$$

For havet er L typisk størrelse til havbassengene (gyrestørrelse), så $L \sim 2000$ km. I havet er lengdeskalaen for et synoptisk system mye mindre enn tilsvarende for atmosfæren, typisk $L_\rho \sim 100$ km. Totalt gir dette for havet på midlere breddegrader

$$\frac{APE}{KE} \sim 400 \quad (367)$$

For både atmosfære og hav er $APE \gg KE$, som betyr at synoptiske systemer i atmosfære og hav kan hente potensiell energi fra skrående isentropener i atmosfæren og isopyknaler i havet²³, og at det er dette som opprettholder den høye kinetiske energien til disse systemene.

Energioverføringen fra potensiell til kinetisk energi betyr at de skrående isentropene i atmosfæren og isopyknalene i havet blir litt mindre skråstilt. Men siden atmosfæren og havet hele tiden varmes opp i tropene og kjøles ned ved polene vil uansett de skråstilte grenseflatene opprettholdes.

3.3.11 Oppsummering, drivmekanisme for synoptiske systemer (§8.3.2)

Værsystemene på midlere breddegrader drives av overføring av potensiell til kinetisk energi, der den potensielle energien stammer fra den skrående grenseflaten mellom lett og tung væske som forklart med Margules sammenheng (figur 33), eller som illustrert for atmosfæren i figur 44.

Dette kan vises teoretisk ved å betrakte forholdet mellom kinetisk og potensiell energi i en tolagsmodell, dvs. en modell bestående av to væsker med ulik tetthet, med den letteste væsken under den tyngre væsken, og med en skrående grenseflate mellom væskene (som vi kjenner igjen fra Margules sammenheng).

Et hovedresultat er at for både atmosfære og hav er

$$\boxed{APE \gg KE} \quad (368)$$

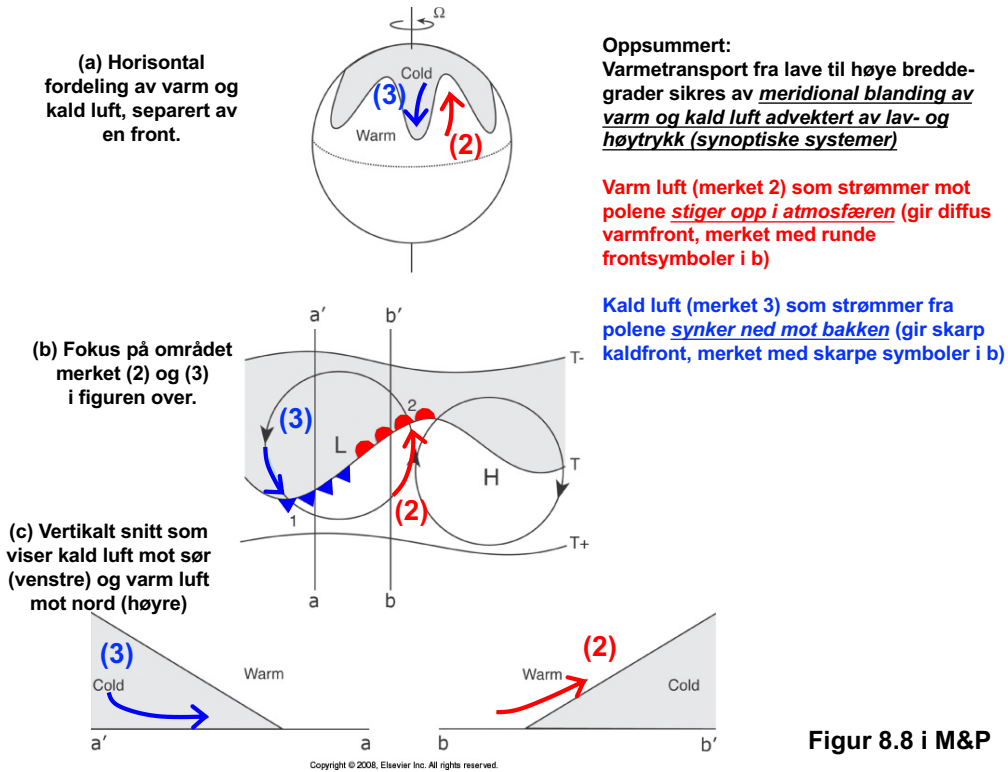
3.3.12 Drivmekanisme for synoptiske systemer, utledning²⁴ (§8.3.3 og oppgave 5, s. 160 i M&P)

Bevegelsesenergien til de synoptiske systemene kommer fra tap av potensiell energi knyttet til bevegelsen til de synoptiske systemene. Hovedmekanismen er at varm luft fra tropene *løftes* i

²³En isopyknal er en flate med konstant, potensiell tetthet. Mer om dette i kap. 9 og 10 i boken.

²⁴Se også seksjon 9.1–9.3 i *LECTURES ON DYNAMICAL METEOROLOGY* av Roger K. Smith, Version: December 11, 2007.

atmosfæren når den strømmer mot høyere breddegrader, mens kald luft fra høye breddegrader *synker* i atmosfæren på vei mot tropene. Som vi skal se medfører begge bevegelsene tap av potensiell energi. Dette er illustrert i figur 46, se også tekst omkring figur 8.8 i Marshall & Plumb (2008) for en diskusjon om dette.



Figur 46: Illustrasjon av sørgående kald luft (blå farge) og nordgående varm luft (rød farge) som eksempel på meridional varmetransport knyttet til lav- og høytrykk på midlere breddegrader. Basert på figur 8.8 i M&P (2008).

Overgang fra potensiell til kinetisk energi i forbindelse med synoptisk aktivitet på midlere breddegrader kan utledes basert på figur 47. Vi betrakter to væskepartikler med tetthet ρ_1 og ρ_2 i posisjon (y_1, z_1) og (y_2, z_2) . Partiklene bytter så plass som del av sirkulasjonen i et lav- eller høytrykk. Vi antar at atmosfærens tetthet er kun en funksjon av potensiell temperatur, $\rho = \rho(\theta)$, med isolinjer for potensiell temperatur og potensiell tetthet som vist i figur 47.

Initiell potensiell energi for de to væskepartiklene med tetthet ρ_1 og ρ_2 i posisjon (y_1, z_1) og (y_2, z_2) er

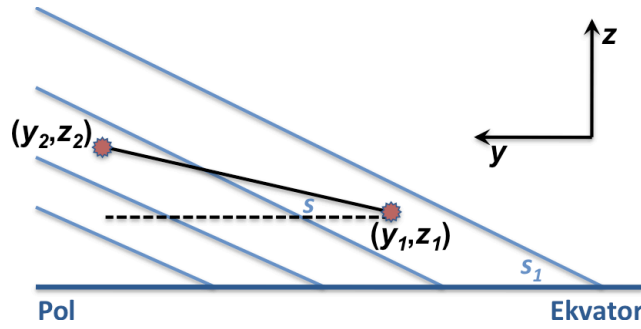
$$PE_{\text{start}} = g(\rho_1 z_1 + \rho_2 z_2) \quad (369)$$

Etter ombytte av væskepartiklene er den potensielle energien

$$PE_{\text{slutt}} = g(\rho_2 z_1 + \rho_1 z_2) \quad (370)$$

Endring i potensiell energi kan da uttrykkes som

$$\Delta PE = PE_{\text{slutt}} - PE_{\text{start}} = g(\rho_2 z_1 + \rho_1 z_2 - \rho_1 z_1 - \rho_2 z_2) \quad (371)$$



Figur 47: Atmosfære med isotermer for potensiell temperatur θ med stigningstall s_1 (avtagende temperatur i positiv y -retning, økende potensiell temperatur i positiv z -retning). Vi betrakter endring av potensiell energi ved ombytte av partiklene (y_1, z_1) og (y_2, z_2) .

(371) kan skrives som

$$\Delta PE = -g(\rho_2 - \rho_1)(z_2 - z_1) = -g\Delta\rho\Delta z \quad (372)$$

der

$$\Delta\rho = \rho_2 - \rho_1 \quad \text{og} \quad \Delta z = z_2 - z_1 \quad (373)$$

Uttrykk (372) sier at potensiell energi forblir uforandret dersom de to væskepakkene ligger på samme nivå ($z_1 = z_2$) eller dersom de to væskepartiklenes tetthet er lik ($\rho_1 = \rho_2$). Sistnevnte situasjon betyr at væskepartiklene bytter plass langs isotermerne for potensiell temperatur. *Potensiell energi kan bare øke når $z_2 > z_1$ og $\rho_2 < \rho_1$.* Dette kan kvantifiseres som beskrevet under.

Δz kan uttrykkes ved hjelp av Δy siden

$$\tan s = \frac{\Delta z}{\Delta y} \quad (374)$$

For små s er $\tan s \approx s$, slik at

$$\Delta z = s\Delta y \quad (375)$$

Videre har vi at siden ρ varierer i y - og z -retningene, så $\rho = \rho(y, z)$, gjelder (se seksjon A.14)

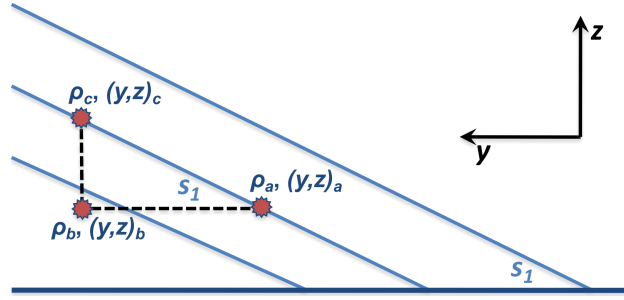
$$\Delta\rho \approx \frac{\partial\rho}{\partial y}\Delta y + \frac{\partial\rho}{\partial z}\Delta z \quad (376)$$

(375) og (376) innsatt i (372), gir

$$\Delta PE = -g\left(\frac{\partial\rho}{\partial y}\Delta y + \frac{\partial\rho}{\partial z}s\Delta y\right)s\Delta y = -g\left(\frac{\partial\rho}{\partial y} + \frac{\partial\rho}{\partial z}s\right)s(\Delta y)^2 \quad (377)$$

Videre kan vi uttrykke $\partial\rho/\partial y$ med hensyn på $\partial\rho/\partial z$. Til dette benytter vi at den potensielle temperaturen θ , og med det tettheten siden $\rho = \rho(\theta)$, er konstant langs isolinjene i figur (48). Det følger da at

$$\frac{\partial\rho}{\partial y} = \frac{\rho_b - \rho_a}{y_b - y_a} = \frac{\rho_b - \rho_c}{y_b - y_a} \quad (378)$$



Figur 48: Illustrasjon for overgang fra horisontal koordinat ($\partial p/\partial y$) til trykk-koordinat ($\partial p/\partial z$).

hvor vi har brukt at $\rho_a = \rho_c$ i den siste overgangen. Videre har vi at

$$\frac{\partial \rho}{\partial z} = \frac{\rho_c - \rho_b}{z_c - z_b} \quad (379)$$

Ved å kombinere (378) og (379), følger det at

$$\frac{\partial \rho}{\partial y} = -\frac{z_c - z_b}{y_b - y_a} \frac{\partial \rho}{\partial z} = -\tan s_1 \frac{\partial \rho}{\partial z} \approx -s_1 \frac{\partial \rho}{\partial z} \quad (380)$$

I siste overgang har vi brukt at $\tan s_1 \approx s_1$ for liten s_1 . Uttrykk (380) innsatt i (377) gir

$$\begin{aligned} \Delta PE &= -g \left(\frac{\partial \rho}{\partial z} s - \frac{\partial \rho}{\partial z} s_1 \right) s (\Delta y)^2 \\ &= \rho_{\text{ref}} \left(-\frac{g}{\rho_{\text{ref}}} \frac{\partial \rho}{\partial z} (s - s_1) \right) s (\Delta y)^2 \\ &= \rho_{\text{ref}} N^2 (s - s_1) s (\Delta y)^2 \end{aligned} \quad (381)$$

der ρ_{ref} er en typisk (eller referanse) tetthet og N er oppdriftsfrekvensen (eller Brunt-Väisälä frekvensen, se seksjon 2.12.1) gitt ved

$$N^2 = -\frac{g}{\rho_{\text{ref}}} \frac{\partial \rho}{\partial z} \quad (382)$$

Uttrykk (381) kan skrives som

$$\Delta PE = \rho_{\text{ref}} N^2 (y_2 - y_1)^2 s (s - s_1) \quad (383)$$

Det følger derfor at fortegnet til ΔPE er styrt av produktet

$$s(s - s_1) \quad (384)$$

Produktet (384) innebærer at den potensielle energien avtar – og med det at den kinetiske energien øker – når $s(s - s_1) < 0$, eller for

$$\boxed{0 < s < s_1} \quad (385)$$

Sammenhengen gitt med (385) er et sentralt resultat: Frigjøring av potensiell energi forekommer for væskepartikler som bytter plass innenfor en vertikal sektor s avgrenset av $0 < s < s_1$. Det

er overgangen fra potensiell til kinetisk energi i denne sektoren som tilfører kinetisk energi til atmosfærens virvler.

Det framkommer også av (384) at den mest effektive overgangen fra potensiell til kinetisk energi finner sted for den verdi av s som tilfredsstill

$$\frac{\partial \Delta PE}{\partial s} = 0 \quad \text{eller} \quad \frac{\partial}{\partial s} (s(s - s_1)) = 0 \quad (386)$$

Den andre derivasjonen gir

$$(s - s_1) + s = 0 \quad (387)$$

eller

$$s = \frac{s_1}{2} \quad (388)$$

Den mest effektive overgangen fra potensiell til kinetisk energi finner altså sted for vinkelen s som halverer sektoren bestemt av vinkelen s_1 i figur 47.

3.3.13 Oppsummert (§8.3)

Synoptiske systemer utenfor Hadley-cellene henter kinetisk energi ved at to (tenkte) luftpakker bytter plass i meridional retning innenfor sektoren begrenset av $0 < s < s_1$ i figur 47.

En alternativ illustrasjon på dette er vist i figur 46, eller med det skråstilte lavtrykket i venstre halvdel av figur 49. I sistnevnte figur vil to vilkårlige luftpakker som tilhører dette lavtrykket – merket med gule sirkler i figuren – bytter plass som del av sirkulasjonen i lavtrykket på en slik måte at luftpakken i sør løftes i atmosfæren mens den beveger seg nordover, mens luftpakken i nord senkes i atmosfæren når den beveger seg sørover. Altså løftes varm luft i atmosfæren når luft strømmer nordover, mens kald luft faller i atmosfæren når luft strømmer sørover (som er hovedessensen i figur 46).

Stigende nordgående og synkende sørgående bevegelse i synoptiske systemer sikrer to egenskaper:

1. At varm luft transporteres nordover og kald luft transporteres sørover (som er en forutsetning for meridional varmetransport); og
2. at de synoptiske systemene kan opprettholde sin bevegelse ved hjelp av overgang fra potensiell til kinetisk energi.

Det siste er mulig da den skrå grenseflaten i Margules sammenheng «lagrer» mye potensiell energi. De synoptiske systemene kan hente ut noe av den potensielle energien ved å gjøre grenseflaten litt mindre bratt. Siden jorden hele tiden tilføres varme ved ekvator og taper varme ved polene vil grenseflaten ikke kollapse på tross av de synoptiske systemenes systematiske uthenting av potensiell energi, men opprettholdes i en balanse mellom tilført og tapt potensiell energi.

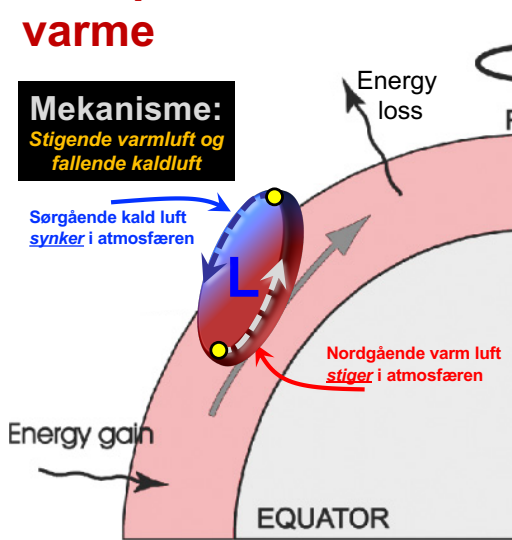
3.3.14 Meridional transport av sonalt momentum utenfor Hadley-cellene (§8.4.2)

Siste punkt i kapittel 8 er hvordan sonalt momentum blir transportert fra lave til høye breddegrader som skissert på høyre side av figur 49.

Dersom det var ren sonal vind på jorden, se figur 50, kan det ikke være meridional transport av momentum siden vindene i dette tilfellet ikke har en y -komponent. Tilsvarende vil perfekt sirkulære lav- og høytrykk ikke bidra til meridional transport av sonalt momentum da totalbidragene fra nord- og søroverrettet vind vil være identisk.

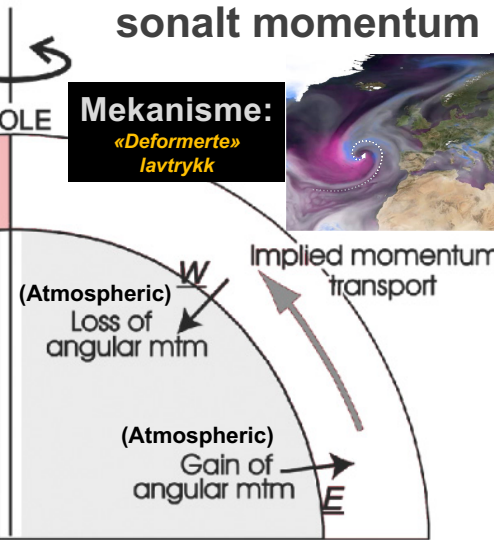
Nordgående transport av varme

Mekanisme:
Stigende varmluft og fallende kaldluft



Nordgående transport av sonalt momentum

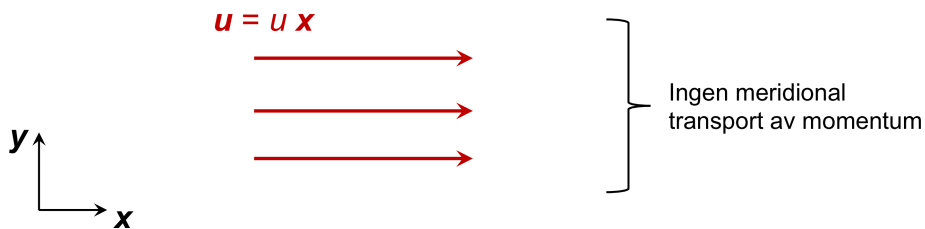
Mekanisme:
«Deformerte» lavtrykk



Copyright © 2008, Elsevier Inc. All rights reserved.

Figur 8.1 i M&P

Figur 49: Utenfor Hadley-cellene, for $\varphi \gtrsim 30^\circ$, har de synoptiske systemene egenskaper slik at de – midlet over tid – sikrer at det er transport av varme fra lave til høye breddegrader (venstre halvdel av figuren over) og at det er nordoverrettet transport av (vestlig) sonalt momentum (høyre halvdel av figur). Omarbeidet fra figur 8.1 i M&P (2008).



Figur 50: Illustrasjon av ren sonal strøm $\mathbf{u} = u \hat{x}$. Siden det ikke er en meridional komponent kan sonal strøm ikke transportere momentum i meridional retning.

De synoptiske systemene utenfor Hadley-cellene må kan derfor ikke være perfekt sirkelformet for å sikre meridional transport av sonalt momentum. Den spesielle formen gjelder ikke for alle synoptiske systemer hele tiden, men den må gjelde når en midler bevegelsen i tid og rom.

For å se dette, kan vi argumentere som følger:

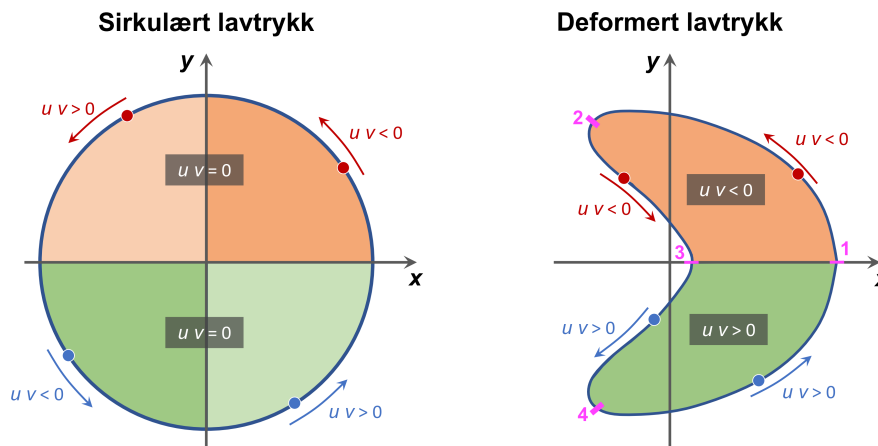
- Sonalt spinn per enhetsmasse (se 343)

$$A = \Omega a^2 \cos^2 \varphi + u a \cos \varphi \quad (389)$$

skaleres med sonal fart u

- Meridional transport av en generell størrelse må skalere med meridional fart v
- Meridional transport av sonalt momentum må da skalere med produktet uv

Vi betrakter derfor produktet uv for synoptiske systemer, med et lavtrykk på den nordlige halvkule som eksempel, se figur 51.

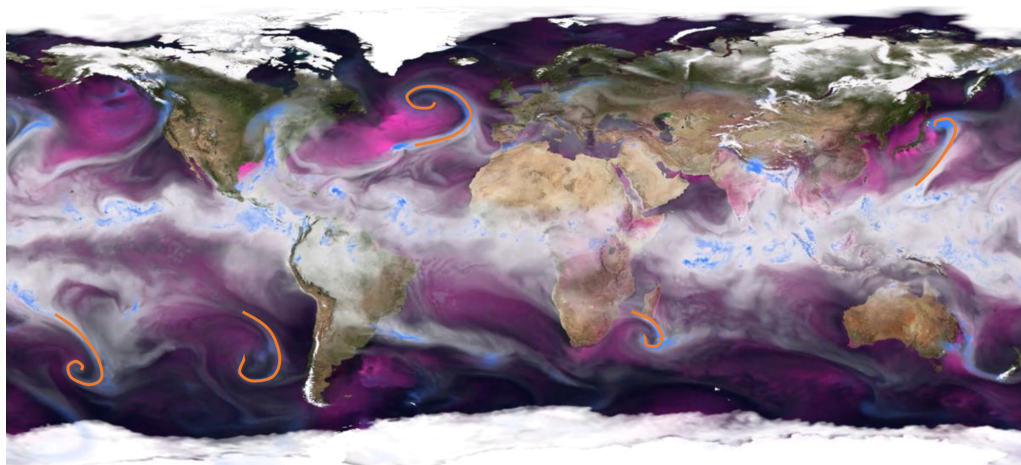


Figur 51: Illustrasjon av fortegnet til produktet uv for et perfekt, sirkulært lavtrykk på den nordlige halvkule til venstre, og for et «bananformet» lavtrykk til høyre. Fortegnet til uv betegner om uv øker eller avtar. I første kvadrant i illustrasjonen til venstre, avtar u mens v øker, så $uv < 0$. I andre kvadrant avtar både u og v , så $uv > 0$, osv.

For et perfekt, sirkulært lavtrykk vil produktet uv ha negativt fortegn i første kvadrant og positivt fortegn i andre kvadrant. Grunnet symmetri betyr dette at $uv = 0$ når vi betrakter totalbidraget av uv over første og andre kvadrant. Tilsvarende blir $uv = 0$ summert over tredje og fjerde kvadrant. I sum er det altså ikke endring av produktet uv i et perfekt, sirkulært lavtrykk, og følgelig ingen meridional transport av sonalt momentum.

For et «bananformet» lavtrykk er $uv < 0$ mellom punktene 1 og 2 i høyre del av figur 51, men også $uv < 0$ mellom punktene 2 og 3. Altså er totalbidraget av $uv < 0$ for øvre halvdel av lavtrykket. På tilsvarende måte er $uv > 0$ for nedre halvdel av lavtrykket. Det siste betyr at det vil være nordoverrettet sonalt momentum i nedre halvdel av et «bananformet» lavtrykk. Så dersom nedre halvdel av lavtrykket har sterkere sirkulasjon enn øvre halvdel, vil sonalt momentum transporteres nordover. Summert over mange synoptiske systemer må det derfor være slik at nedre halvdel av systemene har sterkere sirkulasjon enn øvre halvdel. Noen slike systemer sees i figur 52,

som er et øyeblikksbilde av total mengde fuktighet i atmosfæren (hvit farge) den 14. oktober 2014.



Figur 52: Øyeblikksbilde av total mengde fuktighet i atmosfæren (hvit farge) og store nedbørsmengder (blå farge) den 14. oktober 2014. Lavtrykk som bringer sonalt momentum mot høyere breddegrader er indikert med oransje linjestykker. Fra ECMWF reanalyse, fra en video laget av Mats Bentsen, NORCE/Bjerknessenteret. Videoen er tilgjengelig fra https://folk.uib.no/ngfhd/Animations/watra_ci_sd_e_tcw_tp_201409_11.mov.

3.3.15 Oppsummert (§8.4.2)

For å balansere friksjonsbidraget av østlig vind for breddegrader $\varphi \lesssim 30^\circ$, må det være transport av (positivt) sonalt momentum for $\varphi \gtrsim 30^\circ$. En slik momentumtransport kan ikke skje ved perfekt, sirkulære synoptiske systemer, men ved at systemene – midlet over tid og geografisk – er «deformert» som skissert i høyre del av figur 51, og som vist globalt i figur 52.

4 Temperatur- og saltdrevet havsirkulasjon (§9)

4.1 Noen karakteristiske størrelser for havet

På samme måte som for atmosfæren, er det greit å kjenne til typiske verdier og størrelser/sammenhenger for havet.

- Tetthet ρ har typisk verdi 1024 til 1028 kg/m³.
- Temperatur T har typisk verdi -1.8 til $+32$ °C.
- Saltholdighet S har typisk verdi 32 til 37 psu²⁵.
- Tilstandsligningen

$$\rho = \rho(S, T, p) \quad (390)$$

gir en empirisk sammenheng av tetthetens avhengighet av saltholdighet, temperatur og trykk. Det finnes en rekke tilstandsligninger, fra lineær avhengighet i temperatur- og saltverdi som kan benyttes for et avgrenset temperatur- og saltintervall, til kompliserte sammenhenger som dekker alt fra ferskvann til (svært) salt sjøvann, og for alle temperatur- og trykkregimer som finnes²⁶.

- Et eksempel på en forenklet, lineær tilstandsligning uttrykt med temperatur og salt er

$$\rho = \rho_{\text{ref}} (1 - \alpha_T [T - T_0] + \beta_S [S - S_0]) \quad (391)$$

Her er $\alpha_T > 0$ (1/K) og $\beta_S > 0$ (1/psu) *termal ekspansjonskoeffisient* og *halin kontraksjonskoeffisient*, mens T_0 og S_0 er typiske temperatur- og saltverdier.

Fra (391) ser vi at ρ reduseres når T øker. Dette er som forventet grunnet termisk ekspansjon av en vannmasse når denne varmes opp. Tilsvarende ser vi at ρ øker når S øker. Dette er som forventet da vannets tetthet øker ved økende saltholdighet.

- Verdier for α_T og β_S avhenger av temperatur, saltholdighet og trykk, og kan finnes i tabeller eller beregnes ved hjelp av rutiner. Typiske verdier for $T = 15$ °C, $S = 38$ psu og overflatetrykk er

$$\alpha_T = 2 \times 10^{-4} \text{ 1/K} \quad \text{og} \quad \beta_S = 7.6 \times 10^{-4} \text{ 1/psu} \quad (392)$$

- Ofte benyttes sammenhengen

$$\rho = \rho_{\text{ref}} + \sigma \quad (393)$$

hvor ρ_{ref} er en typisk (konstant) tetthet og σ angir tetthetsvariasjoner relativt til ρ_{ref} . For standard sjøvann kan en ofte benytte

$$\rho_{\text{ref}} = 1026 \text{ kg/m}^3 \quad \text{og} \quad \sigma = \pm 2 \text{ kg/m}^3 \quad (394)$$

- Siden ρ varierer lite (noen fåtalls kg/m³ relativt til en typisk verdi på 1026 kg/m³), altså noen promille, er det vanlig å benytte tilnærmingen

$$\rho = \rho_{\text{ref}} \quad (395)$$

²⁵Saltholdighet er (i) enten oppgitt med enhet psu for *practical salinity unit*, som er basert på måling av sjøvanns ledningsevne (konduktivitet) som så blir konvertert til saltholdighet, eller (ii) uten enhet, underforstått at en snakker om g salt / kg sjøvann, eller (iii) ‰ som også viser til g salt / kg sjøvann.

²⁶En mye brukt tilstandsligning for sjøvann er *Thermodynamic Equation of Seawater – 2010* (TEOS), se <http://www.teos-10.org>.

i de horisontale ligningene *forutsatt at ρ ikke deriveres* (kalles Boussinesq tilnærming).

- Spesifikk varmekapasitet c_w for sjøvann har typisk verdi

$$c_w = 4.18 \times 10^3 \text{ J}/(\text{kg K}) \quad (396)$$

- Strømfart u har typisk verdi fra 0.01 til 0.1 m/s, noen steder 1 m/s.
- Volumfluks oppgis i Sv (m^3/s), og

$$1 \text{ Sv} = 10^6 \text{ m}^3/\text{s} \quad (397)$$

Enheten Sv er oppkalt etter den norske oseanograf, meteorolog og polarforsker Harald Ulrik Sverdrup (1888-1957), se https://no.wikipedia.org/wiki/Harald_Ulrik_Sverdrup. Første person som benyttet enheten Sv var sannsynligvis den kanadiske oseanografen Maxwell John Dunbar i en publikasjon fra 1962²⁷.

- Golfstrømmen utenfor Cape Hatteras ved 35° N på USAs østkyst har en volumfluks på rundt 40 Sv. Innstrømmingen av varmt, salt Atlanterhavsvann til De nordiske hav har en volumfluks på rundt 8 Sv. Den antarktiske sirkumpolare strøm (Sørishavsstrømmen) har en volumfluks på rundt 140 Sv. Til sammenligning er total avrenning av ferskvann fra land på rundt 1.2 Sv.
- Havets overflatenivå η (m) er ikke flat grunnet termisk ekspansjon/kontraksjon og dynamikk. Havets overflate kan ha en helning på opp til 1 m per 1000 km, se figur 53. Dette setter opp en trykkgradient på tilsvarende måte som for en hellende geopotensialflate.
- Havets areal utgør rundt 71 % av jordens overflateareal.
- Havets midlere dyp er på rundt 3700 m.

4.2 Rossbyttall og geostrofisk tilnærming

Rossbyttallet

$$R_0 = \frac{\mathcal{U}}{f\mathcal{L}} \quad (398)$$

for storskala havsirkulasjon på midlere breddegrader kan estimeres basert på følgende verdier

$$\mathcal{U} \sim 0.1 \text{ m/s} \quad (399)$$

$$\mathcal{L} \sim 10^6 \text{ m} \quad (400)$$

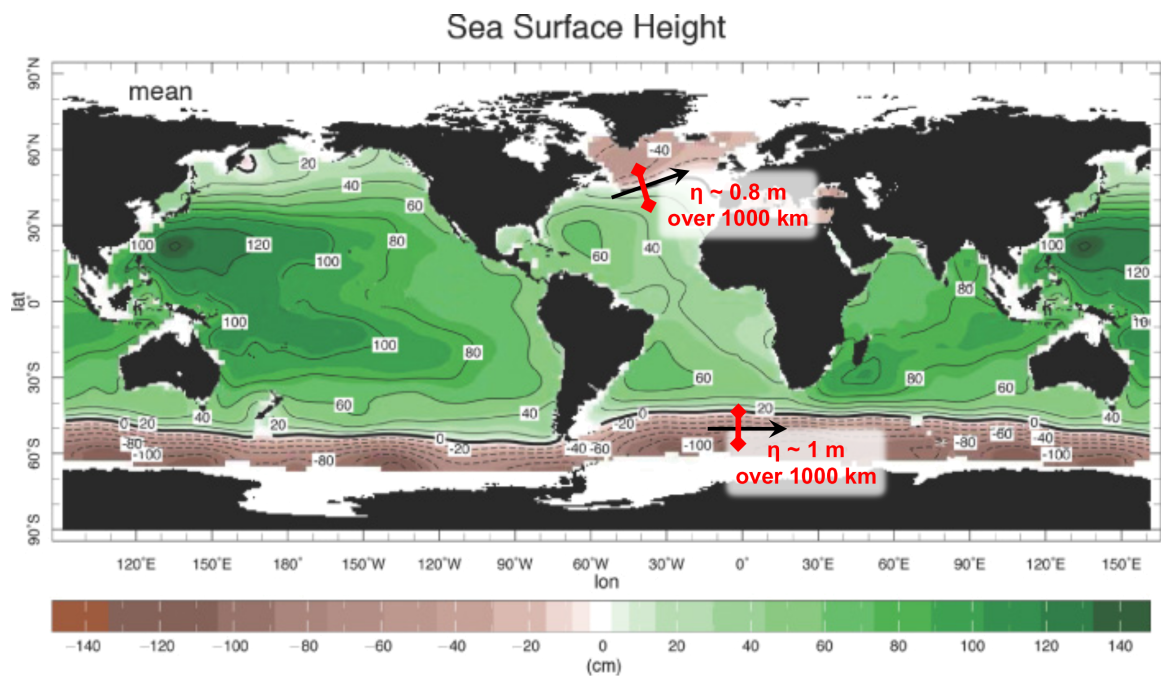
$$f \sim 1 \times 10^{-4} \text{ 1/s} \quad (401)$$

Dette gir

$$\boxed{R_0 \sim 10^{-3} \ll 1} \quad (402)$$

slik at geostrofi er generelt en *meget* god tilnærming i havet (under forutsetning av at vi holder oss borte fra ekvator, og at det ikke virker friksjon).

²⁷Dunbar, M. J. (1962). The Living Resources of Northern Canada. In: Canadian Population and Northern Colonization; Roy. Soc. Can. Symposium, 1961: 125-135. University of Toronto Press, tilgjengelig fra <http://vedlegg.uib.no/?id=dc75f41530b1cabf1e9407f0af7cd32a>.



Figur 53: Havets overflate η (cm) relativt til et «flatt» hav (egentlig relativt til jordens *geoide*, som er en tenkt flate på nivå med gjennomsnittlig havnivå og med lik (konstant) gravitasjon). Positive verdier (grønn farge) indikerer forhøyet havnivå. Områder med spesielt stor høydeforskjell er merket med rødt i figuren, samt tilhørende geostrofisk strøm (svarte piler). Basert på figur 9.19 i M&P.

Horisontal kraftbalanse med forutsetningene $R_0 \ll 1$ og $\mathcal{F}_{x,y} = 0$ gir geostrofisk strøm

$$\boxed{\mathbf{u}_g = \frac{1}{f \rho_{\text{ref}}} \hat{\mathbf{z}} \times \nabla p} \quad (403)$$

Merk at det her er benyttet konstant tetthet ρ_{ref} . Dette er greit siden variasjoner i ρ utgjør bare en (eller to) promille av verdien til ρ_{ref} (f.eks. $\rho = 1025.5 \text{ kg/m}^3$ sammenlignet med $\rho_{\text{ref}} = 1026 \text{ kg/m}^3$).

Vertikal kraftbalanse med forutsetningene $Dw/Dt = 0$ og $\mathcal{F}_z = 0$ gir hydrostatisk tilnærming

$$\frac{\partial p}{\partial z} = -\rho g = -(\rho_{\text{ref}} + \sigma) g \quad (404)$$

Her er (393) benyttet i siste overgang.

4.3 Geostrofisk strøm på ulike dyp z

Geostrofisk strøm i havet bestemmes av horisontale gradienter i havets tetthet ρ

$$\frac{\partial \rho}{\partial x} \quad \text{og} \quad \frac{\partial \rho}{\partial y} \quad (405)$$

og av havets overflatehelling η

$$\frac{\partial \eta}{\partial x} \quad \text{og} \quad \frac{\partial \eta}{\partial y} \quad (406)$$

I det følgende benytter vi først hydrostatisk tilnærming (404) for å bestemme trykket p for et gitt dyp z , og deretter ∇p for å bestemme geostrofisk strøm fra (403) på ulike dyp z . Utgangspunktet for utledningen er vist i figur 54.

4.3.1 Trykk p på et generelt dyp z

Trykket på et generelt dyp z kan finnes ved å integrere (404) fra z til overflaten η

$$\int_z^\eta \frac{\partial p}{\partial z} dz = -g \int_z^\eta \rho dz \quad (407)$$

Tettheten ρ avhenger av z , men vi vet generelt ikke hvordan. Vi må da forenkle for å kunne løse integralet. Dette gjøres ved å innføre middelerdi $\langle \rho \rangle = \text{konst. av } \rho \text{ mellom } z \text{ og } \eta$. Integralet (407) kan da skrives som

$$p(x, y, z = \eta) - p(x, y, z) = -g \langle \rho \rangle (\eta - z) \quad (408)$$

hvor middelerdien av ρ er²⁸

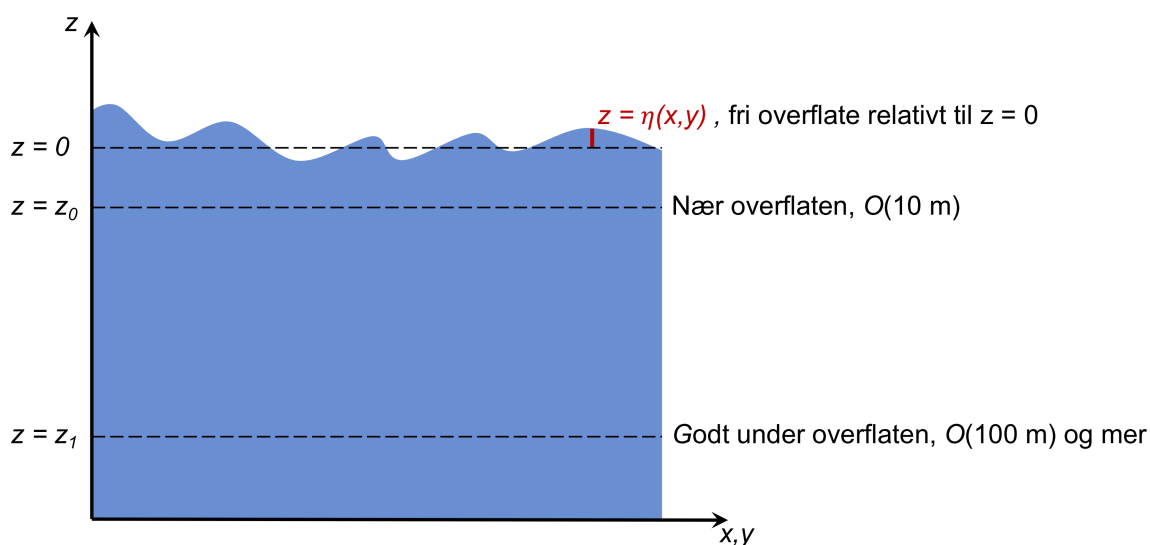
$$\langle \rho \rangle = \frac{1}{\eta - z} \int_z^\eta \rho dz \quad (409)$$

Uttrykk (408) kan alternativt skrives som

$$\boxed{p(x, y, z) = p_s + g \langle \rho \rangle (\eta - z)} \quad (410)$$

Her er $p_s = p(x, y, z = \eta)$ atmosfærisk trykk på havoverflaten.

²⁸Merk at det *ikke* skal være g i første linje etter uttrykk (9.10) i M&P.



Figur 54: Illustrasjon av havets frie overflate η relativt til $z = 0$ (flatt hav), et dyp z_0 nær overflaten (øverste 10 m eller så) og et dyp z_1 som ligger godt under havoverflaten (100 m dyp eller mer).

4.3.2 Horisontal gradient av p

Over tid og over store områder varierer overflatetrykket p_s lite. Dette betyr at

$$\nabla p_s \approx 0 \quad (411)$$

Derfor kan p_s betraktes som konstant når vi tar gradienten av uttrykk (410). Dette gir

$$\nabla p = g \langle \rho \rangle \nabla \eta + g(\eta - z) \nabla \langle \rho \rangle \quad (412)$$

$$\approx g \rho_{\text{ref}} \nabla \eta + g(\eta - z) \nabla \langle \rho \rangle \quad (413)$$

4.3.3 Geostrofisk strøm på generelt dyp z

Kombinasjon av geostrofiuttrykket (403) og trykkgradientuttrykket (413) gir

$$\mathbf{u}_g = \frac{1}{f \rho_{\text{ref}}} \hat{\mathbf{z}} \times \nabla p \quad (414)$$

$$= \frac{1}{f \rho_{\text{ref}}} \hat{\mathbf{z}} \times [g \rho_{\text{ref}} \nabla \eta + g(\eta - z) \nabla \langle \rho \rangle] \quad (415)$$

$$= \underbrace{\frac{g}{f} \hat{\mathbf{z}} \times \nabla \eta}_{(a)} + \underbrace{\frac{g(\eta - z)}{f \rho_{\text{ref}}} \hat{\mathbf{z}} \times \nabla \langle \rho \rangle}_{(b)} \quad (416)$$

Bidrag fra fri overflate η , som er ledd (a) i uttrykket over, gir geostrofisk strøm grunnet overflatehelning. Dette uttrykket har samme form som geostrofisk strøm i atmosfæren på geopotensialflater, se (180). Dette er som forventet; begge uttrykk gir geostrofisk strøm på flater med konstant trykk.

Bidrag fra horisontal tetthetsgradient, $\nabla \langle \rho \rangle$, følger fra ledd (b) i uttrykket over. Merk at dersom vi har uniform tetthet $\rho = \langle \rho \rangle = \rho_{\text{ref}}$ forsvinner ledd (b) og \mathbf{u}_g er *uavhengig av dypet* (fra ledd a), som er Taylor-Proudman et og som gir batotrop strøm.

4.3.4 Geostrofisk strøm nær overflaten

Leddene (a) og (b) i uttrykk (416) er begge proporsjonale med faktoren g/f . Vi kan derfor se bort fra denne faktoren for å vurdere størrelsesforholdet mellom de to leddene.

Nær overflaten, på dyp $z = z_0$ (se figur 54), f.eks. ned til 10 m dyp, er

$$\frac{\eta - z_0}{\rho_{\text{ref}}} \ll 1 \quad (417)$$

Videre er $\nabla \langle \rho \rangle$ generelt liten. Dette betyr at ledd (b) kan neglisjeres sammenlignet med ledd (a). Dette gir

$$\mathbf{u}_{g,\text{overflate}} = \frac{g}{f} \hat{\mathbf{z}} \times \nabla \eta \quad (418)$$

Nær overflaten er altså geostrofisk strøm bestemt av endring av overflatens høyde.

Til sammenligning er geostrofisk strøm på geopotensialflater gitt med uttrykk (180):

$$\mathbf{u}_g = \frac{g}{f} \hat{\mathbf{z}}_p \times \nabla_p z$$

Huskeregelen for geostrofisk strøm grunnet variasjoner i havets overflatenivå er som for geostrofisk strøm på geopotensialflater i atmosfæren (ligning 180): Når vi faller nedover på flaten η får vi 90° avbøying til høyre på den nordlige halvkule (til venstre på den sørlige halvkule).

4.3.5 Karakteristisk verdi for romlig ending av η

Dersom vi setter inn karakteristiske størrelser i (418), kan vi estimere hvilken overflategradient som vil balansere en gitt geostrofisk strøm. Karakteristiske størrelser innsatt i (418) gir

$$\mathcal{U} \sim \frac{g}{f} \frac{\delta \eta}{\mathcal{L}} \quad (419)$$

eller

$$\delta \eta \sim \frac{f}{g} \mathcal{U} \mathcal{L} \quad (420)$$

Med $\mathcal{U} \sim 0.1$ m/s, $\mathcal{L} \sim 10^6$ m, $f \sim 10^{-4}$ 1/s og $g \sim 10$ m/s², gir dette

$$\delta \eta \sim 1 \text{ m} \quad (421)$$

Havets overflate kan altså forventes å ha en høydeforskjell på opptil 1 m over en distanse på 1000 km. Dette er i samsvar med faktisk overflategradient, se figur 53.

4.3.6 Geostrofisk strøm i dyphavet

Generelt observerer (måler) vi at strømfarten avtar med dypet, dvs. at $|\mathbf{u}_g| \rightarrow 0$ på store dyp. Dette betyr at ledd (b) i uttrykk (416) må tilnærmet kansellere ledd (a) i dypet.

Balanse mellom ledd (a) og (b) i (416) gir

$$|\nabla\eta| \sim \frac{\eta - z}{\rho_{\text{ref}}} |\nabla\langle\rho\rangle| \quad (422)$$

På stort dyp $z = -H$, hvor $H \gg \eta$, gir dette balansen

$$|\nabla\eta| \sim \frac{H}{\rho_{\text{ref}}} |\nabla\langle\rho\rangle| \quad (423)$$

eller

$$|\nabla\langle\rho\rangle| \sim \frac{\rho_{\text{ref}}}{H} |\nabla\eta| \quad (424)$$

Vi søker nå uttrykk for forholdet mellom

$$\frac{|\text{Horisontal gradient av } \rho|}{|\text{Vertikal gradient av } \rho|}$$

Ved å dividere (424) med $|\partial\rho/\partial z|$ fremkommer dette forholdet på venstre side av (424). Alternativt kan vi dividere med oppdriftsfrekvensen kvadrert, N^2 , siden denne er proporsjonal med $\partial\rho/\partial z$ eller, i vårt tilfelle $\partial\langle\rho\rangle/\partial z$:

$$N^2 = -\frac{g}{\rho_{\text{ref}}} \frac{\partial\langle\rho\rangle}{\partial z} \quad (425)$$

Divisjon med N^2 , men der vi skriver ut fullt uttrykk for N^2 på venstre side, gir

$$\frac{\rho_{\text{ref}}}{g} \frac{|\nabla\langle\rho\rangle|}{|\partial\langle\rho\rangle/\partial z|} \sim \frac{\rho_{\text{ref}}}{N^2 H} |\nabla\eta| \quad (426)$$

eller

$$\left| \frac{\nabla\langle\rho\rangle}{\partial\langle\rho\rangle/\partial z} \right| \sim \frac{g}{N^2 H} |\nabla\eta| \quad (427)$$

I avsnitt 4.3.8 vises det at venstre side av (427) er det samme som helningen til tetthetsflatene – eller *isopyknalene* – i havet. Uttrykket over sier derfor at i dyphavet må

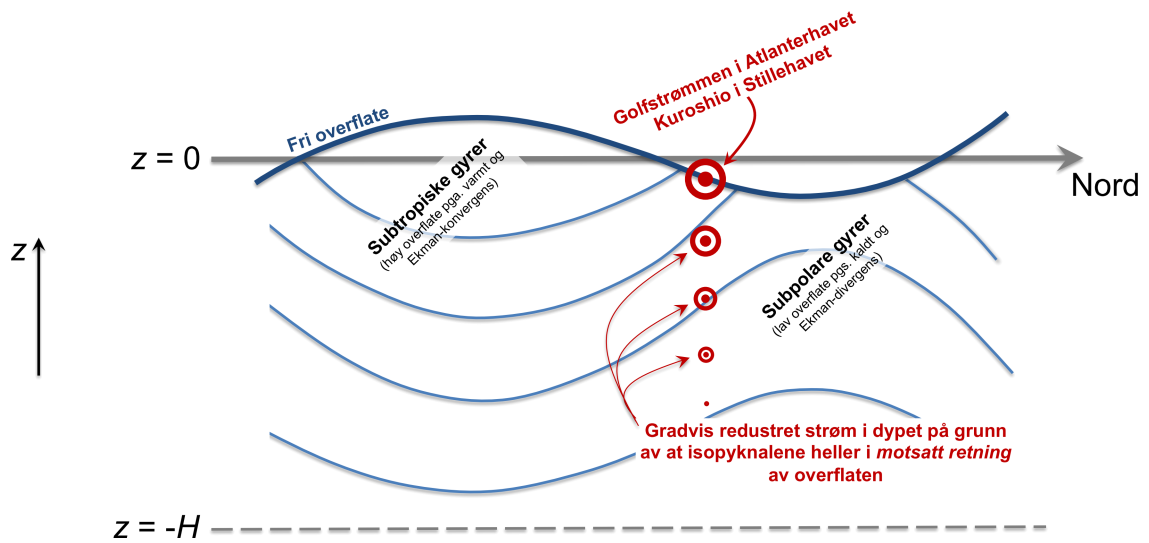
$$\boxed{|\text{Isopyknal helning}| \sim \frac{g}{N^2 H} |\text{Overflatehelning}|} \quad (428)$$

Dette er et sentralt resultat.

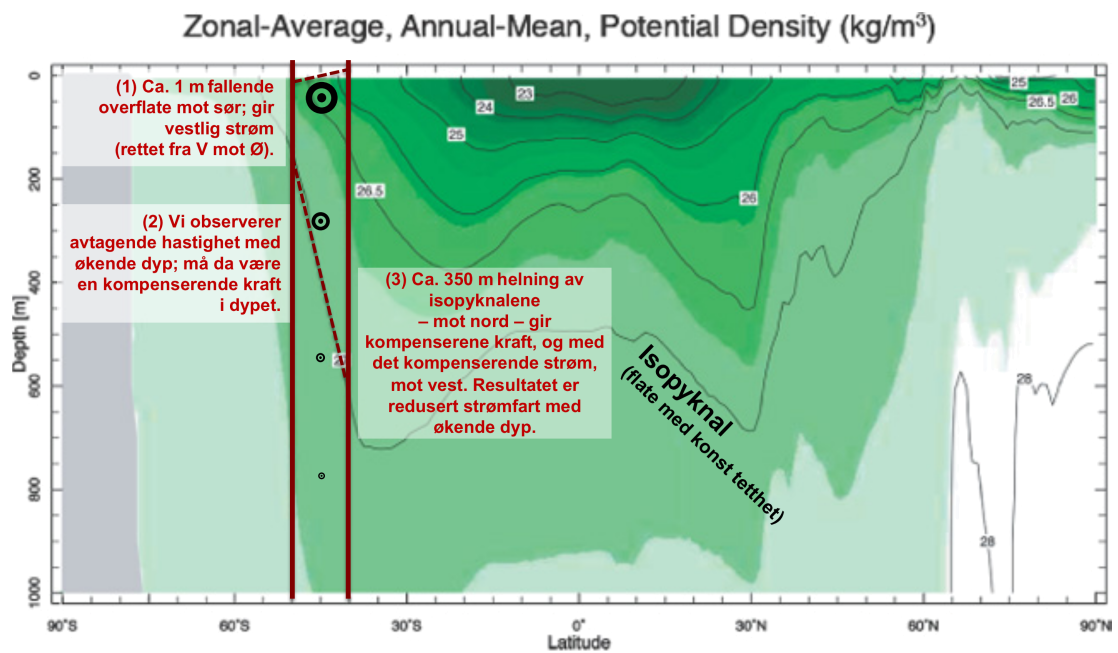
Med $g \sim 10 \text{ m/s}^2$, $N^2 \sim 3 \times 10^{-5}$ (se avsnitt 4.3.7) og $H \sim 1000 \text{ m}$ gir dette, innsatt i (428)

$$|\text{Isopyknal helning}| \sim 350 |\text{Overflatehelning}| \quad (429)$$

Sammenhengen over sier at dersom overflaten f.eks. øker med 1 m over en viss avstand, må tetthetsflatene (isopyknalene) i dypet falle med $\sim 350 \text{ m}$ for at strømfarten skal gå mot null i dypet. Dette er skissert i figurene 55 og 56.



Figur 55: Illustrasjon av sammenhengen mellom overflatens helning og helning til isopyknalene i havet. Havnivået står høyt i de subtropiske gyrene grunnet høy vanntemperatur og konvergerende Ekman-transport (kap. 10 i boken), og lavt i de subpolare gyrene grunnet lav vanntemperatur og Ekman-divergens. Figuren er representativ for den nordlige halvkule, med Golfstrømmen og Kuroshiostrømmen rettet ut av pappirplanet. Vertikal skala er ikke representativ for faktisk helning. Omarbeidet fra figur 9.20 i M&P.



Figur 56: Tilsvarende som figur 55, men basert på observert, sonalt og årlig midlet helning av isopyknalene i havets øverste 1000 m. Omarbeidet fra figur 9.7 i M&P.

4.3.7 Typisk verdi av svingefrekvensen N

Generelt varierer sjøvannets tetthet ρ (og med det σ) mye mer pga. variasjoner i temperatur T enn saltholdighet S .

Verdi av oppdriftsfrekvensen N (uttrykk 247) kan derfor estimeres basert på vertikal profil av T :

$$N^2 = -\frac{g}{\rho_{\text{ref}}} \frac{\partial \rho}{\partial z} \quad (430)$$

$$\approx -\frac{g}{\rho_{\text{ref}}} \left(-\rho_{\text{ref}} \alpha_T \frac{\partial T}{\partial z} \right) \quad (431)$$

$$= g \alpha_T \frac{\partial T}{\partial z} \quad (432)$$

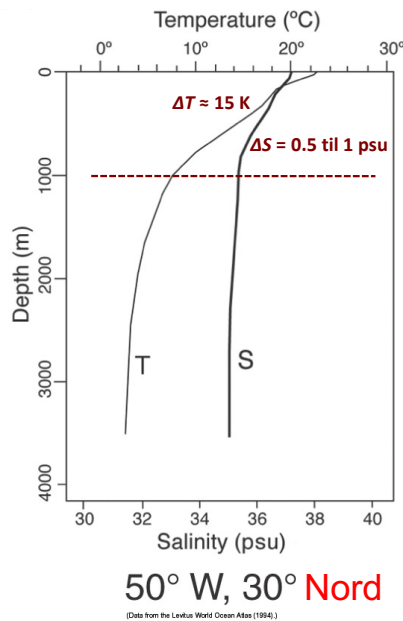
I den andre overgangen er temperaturavhengigheten i tilstandsligning (391) benyttet.

Fra figur 57 følger det at T endrer seg med ca. 15 K over de øverste 1000 m. Med $g = 10 \text{ m/s}^2$ og $\alpha_T = 2 \times 10^{-4} \text{ 1/K}$ gir dette

$$N^2 \sim 3 \times 10^{-5} \text{ 1/s}^2 \quad (433)$$

eller

$$N \sim 5 \times 10^{-3} \text{ 1/s} \quad (434)$$



Figur 9.12 i M&P

Figur 57: Observert endring av temperatur (tynn linje) og saltholdighet (tykk linje) i Stillehavet (50° V , 30° N). Fra figur 9.12 i M&P (skal være 30° N , ikke 30° V som det står i boken).

Svingefrekvensen N har en tidsvariasjon gitt med f.eks.

$$\sin(N t) \quad (435)$$

(se avsnitt 2.12.1). Den vertikale svingningens periode T_N er da gitt ved

$$N T_N = 2\pi \quad (436)$$

eller, med $N = 5 \times 10^{-3} \text{ 1/s}$,

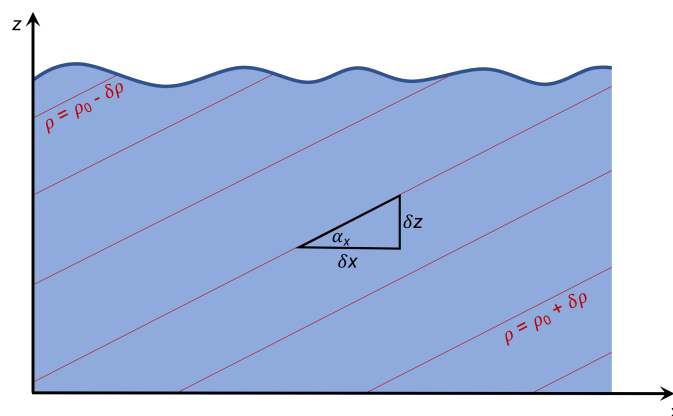
$$T_N = \frac{2\pi}{N} \sim 20 \text{ min} \quad (437)$$

Vertikal svingefrekvens i termoklinen i Stillehavet (og ellers i termoklinen) er derfor noen ti-talls minutter. Områder med større, vertikal tetthetsgradient gir raskere svingefrekvens, og vice versa.

4.3.8 Isopyknal helning

En isopyknal flate er en flate med konstant tetthet relativt til overflatetrykk eller til et annet, konstant referansetrykk. Følgelig spiller en isopyknal i havet rollen til potensiell temperatur i atmosfæren.

Matematisk uttrykk for en isopyknals helning slik som den fremkommer på venstre side av (428) kan utledes basert på figur 58, i dette tilfellet for x -retningen (tilsvarende gjelder for y -retningen).



Figur 58: Illustrasjon av skråstilte isopyknaler i havet (røde linjer) i x, z -planet, og isopyknales stigningstall α_x i x -retningen.

Fra figuren følger det at

$$\tan \alpha_x = \frac{\delta z}{\delta x} \quad (438)$$

hvor α_x er isopyknal helning i x -retningen.

Uttrykket over kan omskrives

$$\tan \alpha_x = \frac{1/\delta x}{1/\delta z} = \frac{\delta \rho / \delta x}{\delta \rho / \delta z} \quad (439)$$

For små α_x er $\tan \alpha_x \approx \alpha_x$, og når $\delta \rightarrow 0$ gir dette

$$\alpha_x \approx \frac{\partial \rho / \partial x}{\partial \rho / \partial z} \quad (440)$$

Tilsvarende vil

$$\alpha_y \approx \frac{\partial \rho / \partial y}{\partial \rho / \partial z} \quad (441)$$

Isopyknal helning α i x - og y -retningene gir da

$$\alpha = \alpha_x \hat{\mathbf{x}} + \alpha_y \hat{\mathbf{y}} \quad (442)$$

$$= \frac{1}{\partial \rho / \partial z} \left(\frac{\partial \rho}{\partial x} \hat{\mathbf{x}} + \frac{\partial \rho}{\partial y} \hat{\mathbf{y}} \right) \quad (443)$$

$$= \frac{\nabla \rho}{\partial \rho / \partial z} \quad (444)$$

Med ρ erstattet med $\langle \rho \rangle$ er dette uttrykk (428).

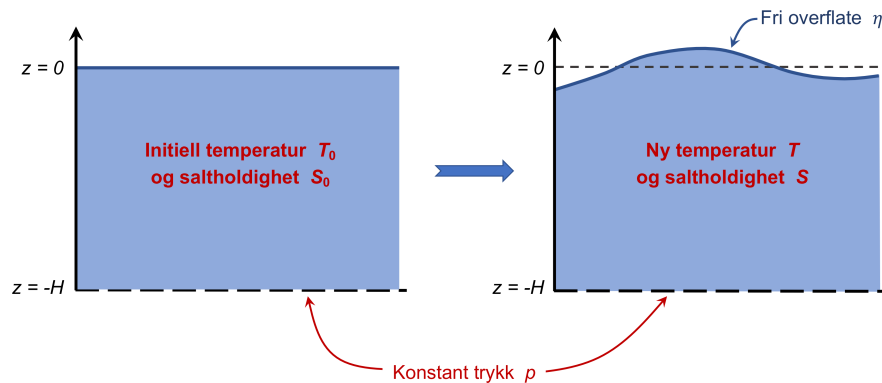
4.4 Sterisk høyde (§9.3.3)

Oppvarming av en vannsøyle fører til termisk ekspansjon og følgelig høyere overflatenivå. Dette kalles *termosterisk* bidrag til havnivå.

Økende saltholdighet fører til kontraksjon av vannets volum og overflatenivået faller. Dette er *halosterisk* bidrag til havnivå.

Summen av de to bidragene kalles *sterisk*²⁹ bidrag til havnivå η .

Typisk bidrag fra temperatur og saltholdighet til havnivå η kan estimeres basert på figur 59 og observert profil av temperatur og saltholdighet.



Figur 59: Illustrasjon på hvordan termo- og halosterisk bidrag til havnivå η kan estimeres. Til venstre en initiell tilstand med konstant temperatur T_0 og saltholdighet S_0 , og flatt havnivå. Til høyre endret havnivå η grunnet endring i temperatur og/eller saltholdighet. Vi antar at trykket på dyp $z = -H$ er konstant.

Fra avsnitt 4.3.1 har vi at trykket på et vilkårlig dyp z kan skrives som

$$p(x, y, z) = p_s + g \langle \rho \rangle (\eta - z) \quad (445)$$

og at gradienten til p , med $\nabla p_s \approx 0$, er

$$\nabla p = g \rho_0 \nabla \eta + g(\eta - z) \nabla \langle \rho \rangle \quad (446)$$

²⁹Ordet *sterisk* (fra gresk, «hard» eller «solid») omhandler romlige bindinger av atomer.

hvor ρ_0 er en konstant referansetetthet.

Evaluert på dypet $z = -H$ (med $H \gg \eta$), og med antagelsen $p(z = -H) = \text{konst.}$, se figur 59, gir (446)

$$0 = g\rho_0 \nabla \eta + gH \nabla \langle \rho \rangle \quad (447)$$

eller

$$\nabla \eta = -\frac{H}{\rho_0} \nabla \langle \rho \rangle \quad (448)$$

Uttrykket over kan alternativt skrives som

$$\delta \eta = -\frac{H}{\rho_0} \delta \langle \rho \rangle \quad (449)$$

Tilstandsligningen (391) gir hvordan variasjoner i T og S endrer ρ . Det følger da fra (391) at

$$\delta \langle \rho \rangle = \rho_0 [-\alpha_T \langle T - T_0 \rangle + \beta_s \langle S - S_0 \rangle] \quad (450)$$

På tilsvarende måte som $\langle \rho \rangle$ betegner vertikal gjennomsverdi av ρ , betegner $\langle T - T_0 \rangle$ vertikal gjennomsverdi av $T - T_0$, og tilsvarende for saltholdighet.

Uttrykk (450) innsatt i (449) gir

$$\delta \eta = H [\alpha_T \langle T - T_0 \rangle - \beta_s \langle S - S_0 \rangle] \quad (451)$$

Ved å bruke realistiske verdier for $\langle T - T_0 \rangle$ og $\langle S - S_0 \rangle$ i (451) kan endring i $\delta \eta$ estimeres. Verdi av $\langle T_0 \rangle$ og $\langle S_0 \rangle$ kan da betraktes som vertikalt midlet temperatur og saltholdighet dersom vi ser bort fra virkningen av soloppvarming, nedbør og fordampning, sirkulasjon, etc., se venstre del av figur 59.

Sonalt, globalt midlet temperatur- og saltholdighet i de øverste 1000 m av vannsøylen er vist i figur 60. Med $H = 1000$ m, kan vi sette $T_0 = 6$ °C som initiell temperatur (som er lik temperaturen på 1000 m dyp). Soloppvarming, blanding og sirkulasjon gir oss en temperaturøkning relativt til T_0 . Midlere temperaturendring i de øverste 1000 m kan da estimeres som gjennomsnittlig temperatur over de øverste 1000 m:

$$\langle T - T_0 \rangle \approx \frac{(22 - 6) \text{ °C}}{2} \approx 10 \text{ K} \quad (452)$$

Tilsvarende kan vi bruke at initiell saltholdighet på 1000 m er $S_0 = 34.5$ psu. Saltholdigheten endres pga. nedbør, fordampning, blanding, havsirkulasjon, etc. Midlere saltendring i de øverste 1000 m kan da estimeres som

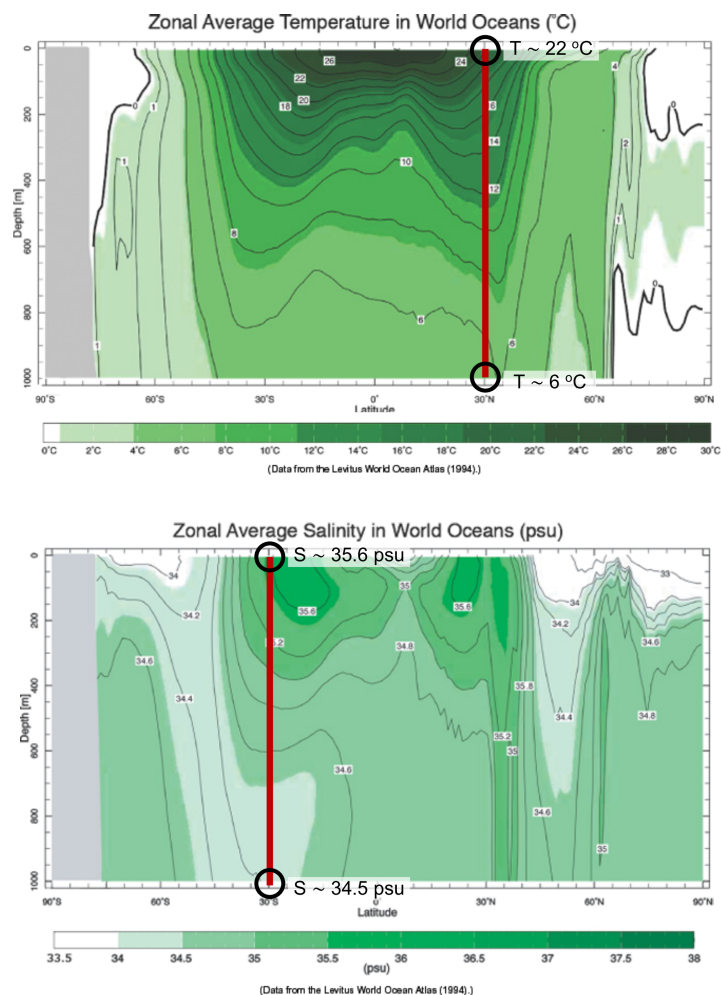
$$\langle S - S_0 \rangle \approx \frac{(35.6 - 34.5) \text{ psu}}{2} \approx 0.5 \text{ psu} \quad (453)$$

Med $\alpha_T = 2 \times 10^{-4}$ 1/K og $\beta_S = 7.6 \times 10^{-4}$ 1/psu gir dette endring i havnivå grunnet temperatur $\delta \eta_T$ og saltholdighet $\delta \eta_S$ på

$$\boxed{\delta \eta_T = 2 \text{ m} \quad \text{og} \quad \delta \eta_S = -0.4 \text{ m}} \quad (454)$$

Resultatet over illustrerer at variasjoner i T generelt gir mye større bidrag til havnivå enn variasjoner i S ³⁰. De subtropiske gyrene har f.eks. høyt havnivå grunnet høy temperatur på tross av også høy saltholdighet (vindens virkning bidrar også til høyt havnivå i subtropene, mer om dette i neste avsnitt).

Det er også typisk at T og S påvirker havnivå med motsatt fortegn.



Figur 60: Sonalt, globalt midlet temperatur (øverst) og saltholdighet i de øverste 1000 m av vannsøylen. De vertikale linjestykkene er plassert på 30. breddegrad, og er følgelig representativ for de subtropiske gyrene. Omarbeidet fra figur 9.5 og 9.6 i M&P.

4.4.1 Eksempel, havnivåendring på tvers av Golfstrømmen

Kommer...

³⁰Polarområdene (med lav havtemperatur) er hovedunntaket til dette.

5 Vinddrevet havsirkulasjon (§10)

5.1 Motivasjon

Overflatevinden på jorden er karakterisert av østlig vind for $|\varphi| \lesssim 30^\circ$, vestlig vind for ca. $30^\circ < |\varphi| < 60^\circ$, og østlig vind for $|\varphi| > 60^\circ$. Hvordan påvirker dette vindpådraget havsirkulasjonen?

Vindpådraget er mekanisk overført friksjon fra luft til hav, kalt *vindstress*.

Grunnleggende vinddynamikk for åpent hav (dvs. for hav med uendelig utstrekning) kalles *Ekman-dynamikk* etter den svenske fysiker og oseanograf Vagn Walfrid Ekman (1874–1954).

Grunnleggende vinddynamikk for havbasseng avgrenset av kontinenter i vest og øst kalles *Sverdrup-dynamikk* etter den norske oseanografen Harald Ulrik Sverdrup (1888–1957).

Selv om overflatevindens direkte friksjonsvirkning på havet bare når 50–100 m ned i vannsøylen, ofte kalt *Ekman-laget*, vil konvergerende og divergerende vindstress i havets overflatelag generere havstrømmer i hele vannsøylen.

5.2 Vindstress og Ekman-lag

5.2.1 Definisjon av $\boldsymbol{\tau}$

Vindstress er en todimensjonal (horisontal) vektor og betegnes med symbolet $\boldsymbol{\tau}$. Enhet er N/m^2 , altså kraft per areal, hvor areal betegner flaten som vinden virker på.

I det følgende betrakter vi et todelt hav: Et øvre lag, Ekman-laget, hvor vindstresset har en direkte friksjonsvirkning, og resten av havet hvor det ikke er direkte friksjonsvirkning. Et vanlig uttrykk for størrelsen til vindstresset er

$$|\boldsymbol{\tau}| = \rho_{\text{luft}} c_D u_{10\text{m}}^2 \quad (455)$$

Her er ρ_{luft} (kg/m^3) luftens tetthet, c_D (dimensjonsfri) er en empirisk størrelse kalt *friksjonskoeffisient* med typisk verdi $c_D \sim 1.5 \times 10^{-3}$, og $\mathbf{u}_{10\text{m}}$ (m/s) er vindvektoren 10 m over havoverflaten.

Dimensjonen på høyre side i uttrykk (455) er

$$\frac{\text{kg}}{\text{m}^3} \cdot 1 \cdot \frac{\text{m}^2}{\text{s}^2} = \frac{\text{kg}}{\text{m s}^2} \quad (456)$$

som er det samme som N/m^2 , som forventet.

På komponentform kan (455) skrives

$$(\tau_x, \tau_y) = \rho_{\text{luft}} c_D |\mathbf{u}_{10\text{m}}| (u_{10\text{m}}, v_{10\text{m}}) \quad (457)$$

Dette betyr at vindstresset har samme retning som $\mathbf{u}_{10\text{m}}$.

5.2.2 Sammenheng mellom kraft, vindstress og \mathcal{F} i momentumligningen

Kraft $\mathbf{F} = m \mathbf{a}$ har dimensjon N og vindstress $\boldsymbol{\tau}$ har dimensjon N/m^2 . Følgelig er

$$\text{vindstress} = \frac{\text{kraft}}{\text{areal}} \quad (458)$$

Friksjonsleddet \mathcal{F} i momentumligningen har dimensjon

$$\frac{\text{kraft}}{\text{enhetsmasse}} \quad (459)$$

Vindstresset kan overføres til et uttrykk med dimensjon kraft / enhetsmasse ved å observere at \mathcal{F} kan uttrykkes som

$$\frac{\text{kraft per enhetsareal}}{\text{enhetsmasse per enhetsareal}} \quad (460)$$

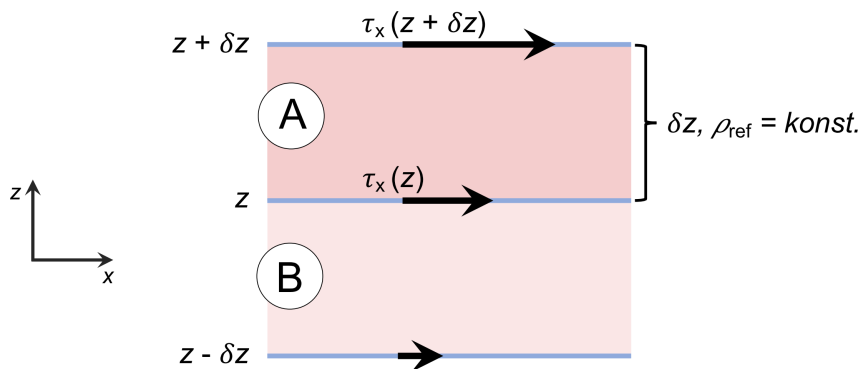
Sammenhengen over, uttrykt med fysiske størrelser, sier at \mathcal{F} kan skrives som

$$\frac{\tau}{\rho \delta x \delta y \delta z / (\delta x \delta y)} \quad (461)$$

Sammenhengen (461) benyttes for å utlede et matematisk uttrykk for vindstressbidraget i momentumligningen.

5.2.3 Utleddning av vindstressbidrag i momentumligningen

Vi observerer (eller antar) at virkningen av τ avtar med dyppet. Vi benytter dette og betrakter netto bidrag i x -retningen på et væskelag A med tykkelse δz og konstant tetthet, se figur 61.



Figur 61: Illustrasjon av vindstress τ_x i x -retningen i en stratifisert væske. På oversiden av væskelag A virker vindstresset $\tau_x(z + \delta z)$, mens vindstresset på oversiden av væskelag B er $\tau_x(z)$.

Fra figuren følger det at vindstresset som virker på lag A fra oversiden er $\tau_x(z + \delta z)$, og fra oversiden på lag B virker $\tau_x(z)$. Netto virkning av vindstress på lag A er følgelig differansen mellom friksjonsvirkningen som når ned til lag A og friksjonsvirkningen som går videre til lag B.

Matematisk kan dette uttrykkes som, fra (461),

$$\mathcal{F}_x = \frac{\tau_x(z + \delta z) - \tau_x(z)}{\rho_{\text{ref}} \delta x \delta y \delta z / (\delta x \delta y)} \quad (462)$$

Differerasen i telleren kan rekkeutvikles til første orden (se avsnitt A.14). Dette gir

$$\mathcal{F}_x = \frac{1}{\rho_{\text{ref}}} \frac{\partial \tau_x}{\partial z} \quad (463)$$

hvor vi har benyttet at $\delta z \rightarrow 0$.

Tilsvarende får vi

$$\mathcal{F}_y = \frac{1}{\rho_{\text{ref}}} \frac{\partial \tau_y}{\partial z} \quad (464)$$

Vindstress kan følgelig inkluderes som en friksjonskraft per enhetsmasse i momentumligningen på formen

$$\boxed{\mathcal{F} = \frac{1}{\rho_{\text{ref}}} \frac{\partial \boldsymbol{\tau}}{\partial z}} \quad (465)$$

5.3 Vinddrevet storskala, fri havsirkulasjon

Med antagelsen om geostrofisk balanse ($R_0 \ll 1$), men med friksjonsvirkningen av overflatevind inkludert, kan momentumligningen i horisontalplanet skrives som

$$\frac{1}{\rho_{\text{ref}}} \nabla p + f \hat{\mathbf{z}} \times \mathbf{u} = \frac{1}{\rho_{\text{ref}}} \frac{\partial \boldsymbol{\tau}}{\partial z} \quad (466)$$

På komponentform gir dette

$$\begin{aligned} \frac{1}{\rho_{\text{ref}}} \frac{\partial p}{\partial x} - f v &= \frac{1}{\rho_{\text{ref}}} \frac{\partial \tau_x}{\partial z} \\ \frac{1}{\rho_{\text{ref}}} \frac{\partial p}{\partial y} + f u &= \frac{1}{\rho_{\text{ref}}} \frac{\partial \tau_y}{\partial z} \end{aligned} \quad (467)$$

Som for friksjon mot bakken i atmosfæren, gir vindstress et tillegg til geostrofi, kalt ageostrofi. Siden hastighetskomponentene (u, v) i (467) forekommer lineært, kan horisontal hastighet \mathbf{u}_h splittes i et geostrofisk \mathbf{u}_g og et ageostrofisk \mathbf{u}_{ag} bidrag, dvs.

$$\mathbf{u}_h = \mathbf{u}_g + \mathbf{u}_{ag} \quad (468)$$

(466) kan derfor skrives

$$\frac{1}{\rho_{\text{ref}}} \nabla p + f \hat{\mathbf{z}} \times \mathbf{u}_g = 0 \quad (469)$$

$$f \hat{\mathbf{z}} \times \mathbf{u}_{ag} = \frac{1}{\rho_{\text{ref}}} \frac{\partial \boldsymbol{\tau}}{\partial z} \quad (470)$$

(merk at summen av (469) og (470) gir (466)).

Kontinuitetsligningen for en inkompressibel væske er

$$\nabla \cdot \mathbf{u} = 0 \quad (471)$$

hvor \mathbf{u} er en tredimensjonal hastighetsvektor. Siden horisontal hastighet er gitt ved (468), kan kontinuitetsligningen uttrykkes som

$$\nabla_h \cdot (\mathbf{u}_g + \mathbf{u}_{ag}) + \frac{\partial w}{\partial z} = 0 \quad (472)$$

hvor $\nabla_h = \hat{\mathbf{x}} \partial / \partial x + \hat{\mathbf{y}} \partial / \partial y$ og w er den vertikale hastighetskomponenten.

For en inkompressibel væske – og når vi kan neglisjere $\partial f/\partial y$, som betyr at vi betrakter dynamikk som har en meridional utstrekning på (rundt) 2000 km eller mindre (se diskusjon rundt ligning (7.5) i M&P) – er $\nabla_h \cdot \mathbf{u}_g = 0$. Kontinuitetsligningen (472) blir da

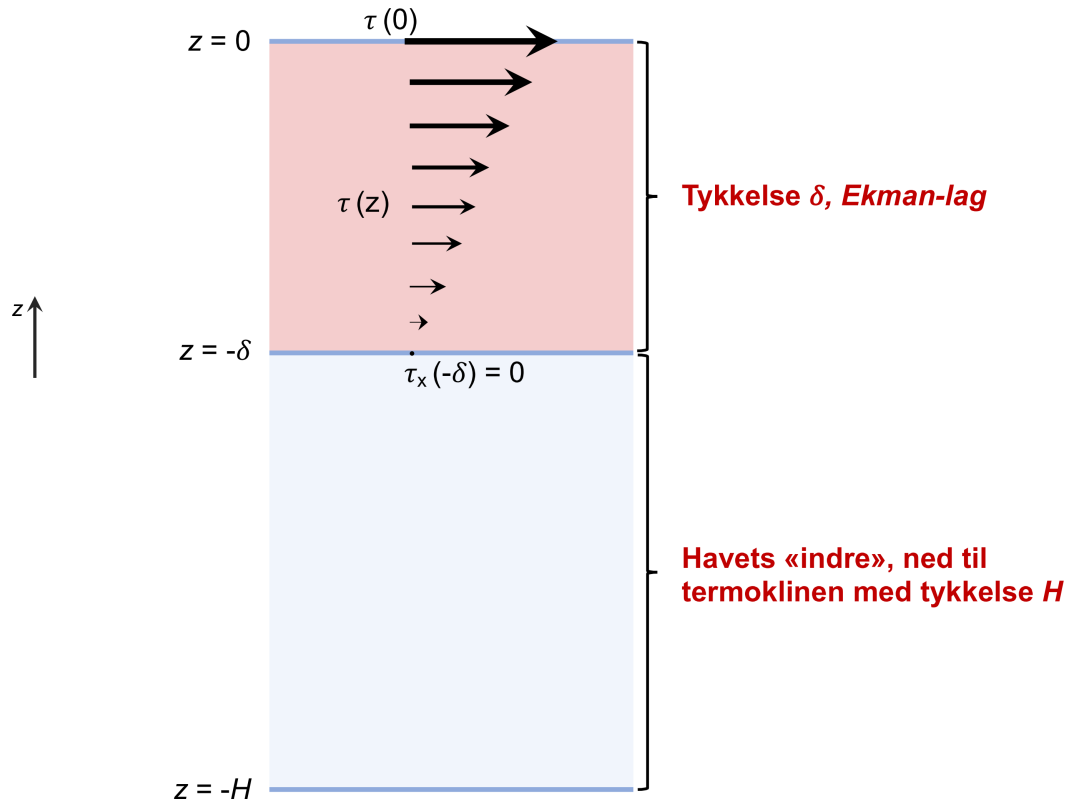
$$\boxed{\nabla_h \cdot \mathbf{u}_{ag} + \frac{\partial w}{\partial z} = 0} \quad (473)$$

Uttrykk (473) viser at konvergens eller divergens av overflatevind, som vil gi bidrag til $\nabla_h \cdot \mathbf{u}_{ag}$, vil sette opp vertikal bevegelse med fart w . Det er dette som gjør at vindens virkning på havet når dypere enn det øvre Ekman-laget, på tross av at vindens direkte friksjonsvirkning bare finner sted i det øverste Ekman-laget med en tykkelse på noen titalls meter.

5.4 Ekman-dynamikk³¹

Ekman-teorien følger antagelsene gitt over, dvs. $R_0 \ll 1$ og at vi ser bort fra friksjon *bortsett fra bidraget fra overflatevind*. I tillegg er Ekman-teorien basert på en idealisert geometri i det vi betrakter et hav med *uendelig horisontal utbredelse*.

I vertikalen betrakter vi to lag; se figur 62, et øvre, tynt Ekman-lag avgrenset av $-\delta < z < 0$, og under det et lag som når ned til termoklinen³² på et dyp $z = -H$. Typiske verdier for δ er 20–100 m, mens H ligger typisk på 300–500 m dyp.



Figur 62: Illustrasjon av det øvre Ekman-laget med tykkelse δ hvor overflatevindens friksjonsbidrag virker, og dypet ned til termoklinen H . Typiske verdier for δ er 20–100 m og for H 300–500 m. Figuren er ikke i skala.

5.4.1 Horizontal massetransport i Ekman-laget

Netto massetransport midlet over Ekman-laget finnes ved å integrere den ageostrofiske ligningen (470) over Ekman-laget. Multipliserer vi (470) med ρ_{ref} og integrerer uttrykket fra bunnen av

³¹Se også seksjon 8.6 i *Introduction to Geophysical Fluid Dynamics* av Benoit Cushman-Roisin og Jean-Marie Beckers (2010), og seksjon 5.3 i *LECTURES ON DYNAMICAL METEOROLOGY* av Roger K. Smith, Version: December 11, 2007.

³²Termoklinen betegner det dypet hvor vertikal temperatur endres raskt fra relativt høy til relativt lav verdi, se f.eks. <https://nn.wikipedia.org/wiki/Termoklin>.

Ekman-laget $z = -\delta$ til overflaten $z = 0$, får vi

$$f\hat{\mathbf{z}} \times \int_{-\delta}^0 \rho_{\text{ref}} \mathbf{u}_{ag} dz = \int_{-\delta}^0 \frac{\partial \boldsymbol{\tau}}{\partial z} dz = \boldsymbol{\tau}(0) - \boldsymbol{\tau}(-\delta) \quad (474)$$

Det er vanlig å skrive $\boldsymbol{\tau}(z = 0) = \boldsymbol{\tau}_{\text{vind}}$.

Siden $\boldsymbol{\tau}(z = -\delta) = 0$, kan (474) skrives som

$$f\hat{\mathbf{z}} \times \mathbf{M}_{\text{Ek}} = \boldsymbol{\tau}_{\text{vind}} \quad (475)$$

Her er

$$\mathbf{M}_{\text{Ek}} \equiv \int_{-\delta}^0 \rho_{\text{ref}} \mathbf{u}_{ag} dz \quad (476)$$

den laterale³³ massetransporten per enhetsareal i Ekman-laget, kalt *Ekman-transporten*, med dimensjon

$$\frac{\text{kg m/s}}{\text{m}^2} \quad (477)$$

Se figur 63 for en skisse av vindstressets virkning i Ekman-laget.

Merk at netto massetransport (dimensjon kg m/s) gjennom arealet A i figur 63 er gitt med produktet $A\mathbf{M}_{\text{Ek}}$. Som vi skal se i neste avsnitt er massetransporten integrert over Ekman-laget rettet 90 grader til høyre for overflatevinden på den nordlige halvkule (til venstre på den sørlige halvkule).

5.4.2 Ekman-transport \mathbf{M}_{Ek} uttrykt med $\boldsymbol{\tau}_{\text{vind}}$

Krysser vi (475) med $\hat{\mathbf{z}}$ fra venstre, som vist til venstre i figur 64, får vi

$$\mathbf{M}_{\text{Ek}} = \frac{\boldsymbol{\tau}_{\text{vind}} \times \hat{\mathbf{z}}}{f} \quad (478)$$

Fra høyre i figur 64 følger det at netto Ekman-transport i Ekman-laget er rettet 90 grader til høyre for vindstressvektoren på den nordlige halvkule ($f > 0$). Dette er i tråd med figur 63. På den sørlige halvkulen er Ekman-transporten rettet 90 grader til venstre for vindstressvektoren.

Uttrykket for \mathbf{M}_{Ek} på komponentform blir

$$\mathbf{M}_{\text{Ek}} = \frac{1}{f} (\tau_{\text{vind},y}, -\tau_{\text{vind},x}) \quad (479)$$

I forhold til komponentene til \mathbf{M}_{Ek} har vindstresskomponentene byttet plass, samt at den ene komponenten har byttet fortegn. Dette gjelder for ethvert kryssprodukt; og dette er årsaken til at \mathbf{M}_{Ek} er rettet normalt på $\boldsymbol{\tau}_{\text{vind}}$.

5.4.3 Konvergens/divergens av Ekman-transport i Ekman-laget

Konvergens/divergens av Ekman-transport i Ekman-laget fører til hhv. Ekman-pumping av vann i Ekman-laget ned i havet og Ekman-løfting av dypere vannmasser opp i Ekman-laget. Det settes da opp en vertikal strøm gjennom Ekman-lagets underside, kalt w_{Ek} .

³³«Lateral» kommer fra latin *latus*, eller side, slik at lateral knyttes til en side.

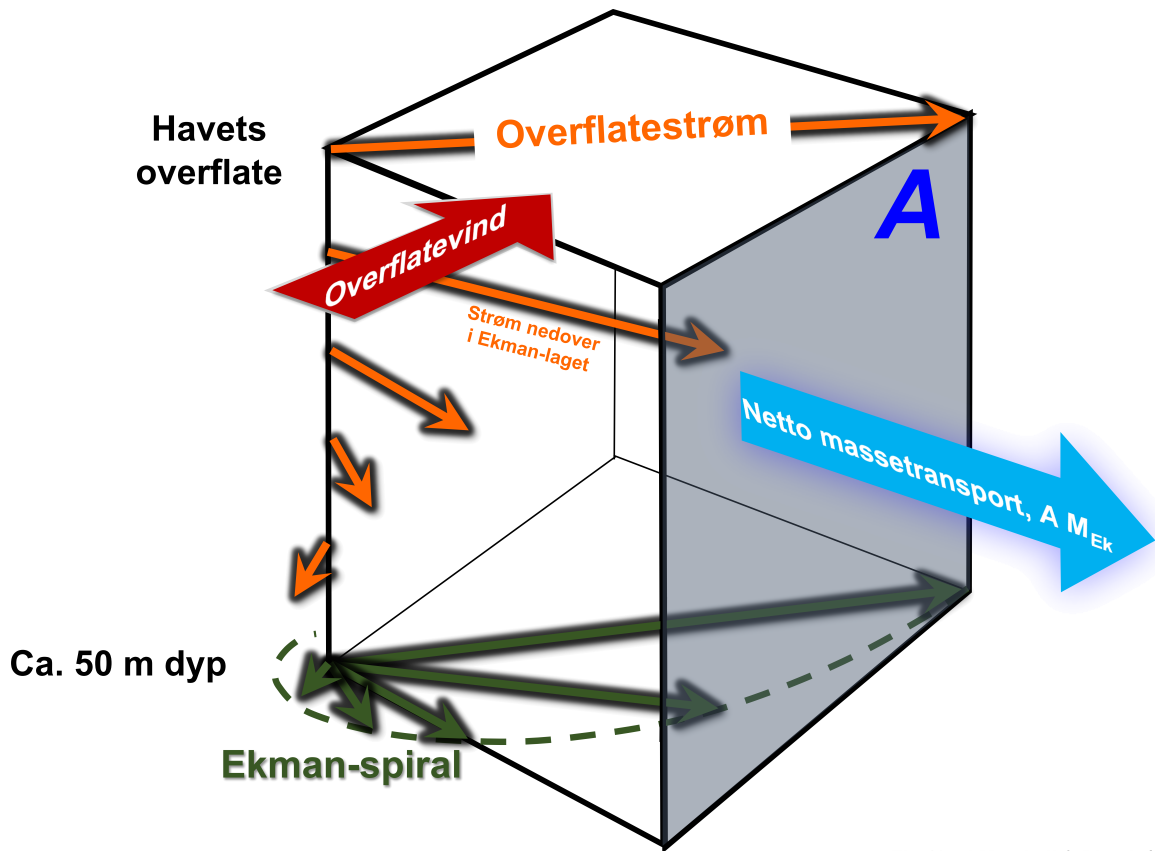
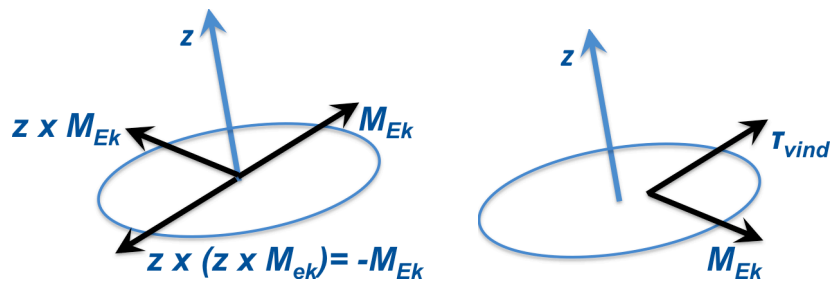


Fig 10.5 i Marshall & Plumb (2008)

Figur 63: Illustrasjon av total massetransport $A M_{EK}$ i Ekman-laget generert av overflatevind. De oransje og grønne strømvektorene viser avtagende strømfart og rotasjon til høyre (på den nordlige halvkule) med økende dyp. A er arealet til det sraverte tverrsnittet og M_{EK} er Ekman-transporten gitt ved (476), eller alternativt ved (478). Basert på figur 10.5 i M&P.



Figur 64: Venstre: Orientering av Ekman-transporten M_{EK} i forhold til enhetsvektoren \hat{z} . Høyre: Orienteringen av Ekman-transporten på den nordlige halvkule i forhold til vindstressvektoren τ .

5.4.4 Transport gjennom nedre grenseflate på Ekman-laget

Verikal transport gjennom den nedre grenseflaten på Ekman-laget følger av kontinuitetsligningen med ageostrofisk horisontal hastighet, se ligning (473):

$$\nabla_h \cdot \mathbf{u}_{ag} + \frac{\partial w}{\partial z} = 0 \quad (480)$$

Integrerer vi (480) over Ekman-laget, får vi

$$\nabla_h \cdot \int_{-\delta}^0 \mathbf{u}_{ag} dz + \int_{-\delta}^0 \frac{\partial w}{\partial z} dz = 0 \quad (481)$$

eller

$$\frac{1}{\rho_{\text{ref}}} \nabla_h \cdot \mathbf{M}_{\text{Ek}} + w(0) - w(-\delta) = 0 \quad (482)$$

hvor definisjonen av \mathbf{M}_{Ek} , uttrykk (476), er benyttet.

Siden $w(z=0) = 0$, og med definisjonen $w_{\text{Ek}} \equiv w(z=-\delta)$, kan (482) skrives som

$$\boxed{w_{\text{Ek}} = \frac{1}{\rho_{\text{ref}}} \nabla_h \cdot \mathbf{M}_{\text{Ek}}} \quad (483)$$

Ekman-transporten (478) innsatt inn i (483) gir w_{Ek} uttrykt med $\boldsymbol{\tau}$:

$$\begin{aligned} w_{\text{Ek}} &= \frac{1}{\rho_{\text{ref}}} \nabla_h \cdot \frac{\boldsymbol{\tau}_{\text{vind}} \times \hat{\mathbf{z}}}{f} \\ &= \frac{1}{\rho_{\text{ref}}} \left[\hat{\mathbf{z}} \cdot \left(\nabla_h \times \frac{\boldsymbol{\tau}_{\text{vind}}}{f} \right) - \frac{\boldsymbol{\tau}_{\text{vind}}}{f} \cdot (\nabla_h \times \hat{\mathbf{z}}) \right] \\ &= \frac{1}{\rho_{\text{ref}}} \hat{\mathbf{z}} \cdot \left(\nabla_h \times \frac{\boldsymbol{\tau}_{\text{vind}}}{f} \right) \end{aligned} \quad (484)$$

I første overgang har vi brukt vektoridentiteten

$$\nabla \cdot (\mathbf{a} \times \mathbf{b}) = \mathbf{b} \cdot (\nabla \times \mathbf{a}) - \mathbf{a} \cdot (\nabla \times \mathbf{b}) \quad (485)$$

med $\mathbf{a} = \boldsymbol{\tau}_{\text{vind}}/f$ og $\mathbf{b} = \hat{\mathbf{z}}$, mens siste overgang bruker at enhetsvektoren $\hat{\mathbf{z}}$ er konstant.

Vertikal hastighet gjennom den nedre grenseflaten av Ekman-laget kan følgelig uttrykkes som

$$\boxed{w_{\text{Ek}} = \frac{1}{\rho_{\text{ref}}} \left[\frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\tau_{\text{vind},y}}{f} \right) - \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\tau_{\text{vind},x}}{f} \right) \right]} \quad (486)$$

5.4.5 Forenkling

Vindene – og dermed vindstresset – er i hovedsak sonalt rettet og med variasjon i meridional retning. Derfor kan (486) tilnærmes

$$w_{\text{Ek}} \approx -\frac{1}{\rho_{\text{ref}}} \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\tau_{\text{vind},x}}{f} \right) \quad (487)$$

Dersom vi i tillegg ikke betrakter store avstander i y -retningen (typisk mindre enn 1000–2000 km), eller dersom variasjoner i $\tau_{\text{vind},x}$ i meridional retning er mye større enn variasjoner i $1/f$, kan vi betrakte f som konstant. Da gjelder

$$\boxed{w_{\text{Ek}} \approx -\frac{1}{f \rho_{\text{ref}}} \frac{\partial \tau_{\text{vind},x}}{\partial y}} \quad (488)$$

5.4.6 Typisk verdi til w_{Ek}

Typisk varierer vindstresset med 0.2 N m^{-2} over 20 breddegrader. For midlere breddegrader (dvs. $\varphi \approx 45^\circ$), følger det da fra (486) at

$$|w_{Ek}| \approx \frac{1}{10^3 \text{ kg m}^{-3}} \frac{0.2 \text{ N m}^{-2}}{1 \cdot 10^{-4} \text{ s}^{-1} \times 20 \cdot 111 \cdot 10^3 \text{ m}} \quad (489)$$

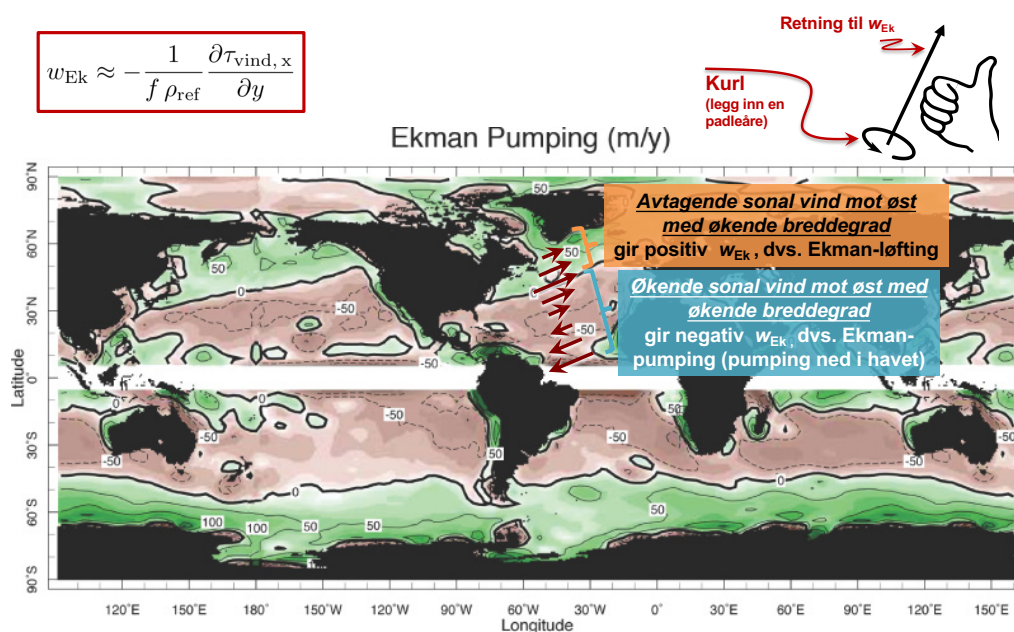
$$= 9 \times 10^{-7} \text{ m s}^{-1} \approx 30 \text{ m år}^{-1}$$

w_{Ek} beregnet fra observert vindstress gir at $15 \text{ m år}^{-1} < |w_{Ek}| < 50 \text{ m år}^{-1}$. Til sammenligning er gjennomsnittlig nedbør ca. 1 m år^{-1} .

Siden $w_{Ek} \approx 30 \text{ m år}^{-1}$, tar det rundt 10 år på å skifte ut vannet i termoklinen (typisk dyp på 300–500 m) grunnet Ekman-pumping.

5.4.7 Tolkning

Fortegn og faktisk verdi av w_{Ek} er vist i figur 65.

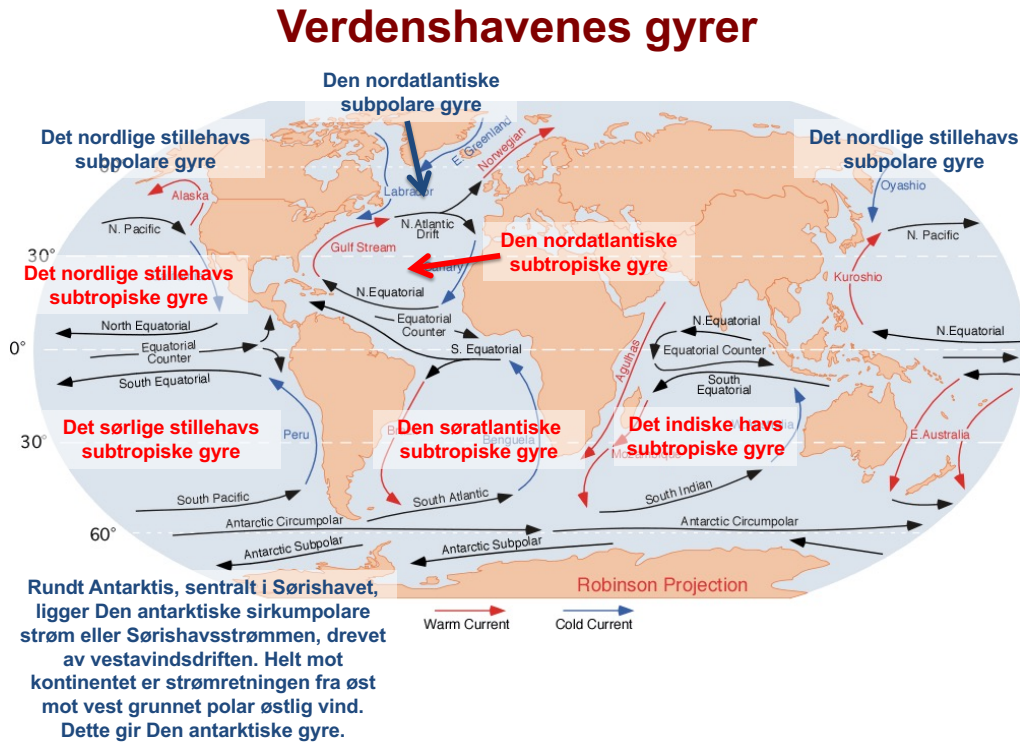


**Havområder hvor vindstresskurlen er lik null (dvs. $w_{Ek} = 0$)
definerer overgangen mellom de subtropiske og subpolare gyrene
og posisjonen til f.eks. Golf- og Kuroshiostrømmen
[kommer tilbake til dette når vi ser på Sverdrup-balansen]**

Figur 65: Verdi av w_{Ek} (m/år), inkludert forklaring på områder med positivt og negativt fortegn basert på uttrykk (488). Omarbeidet fra figur 10.11 i M&P.

Områder med $w_{Ek} < 0$, som korresponderer med områder med konvergerende Ekman-transport M_{Ek} , definerer de *sub-tropiske gyrene*. Tilsvarende definerer områder med $w_{Ek} > 0$, som korre-

sponderer med divergerende Ekman-transport, de *sub-polare gyrene*. Dette er skjematisk illustrert i figur 66.



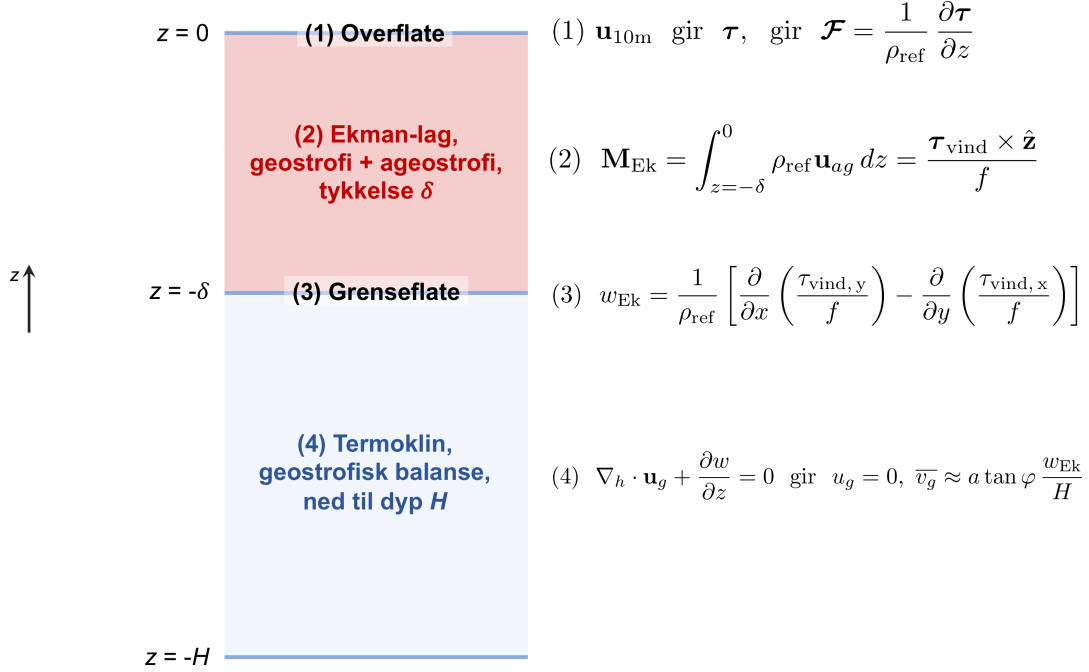
Figur 66: Illustrasjon av plassering og sirkulasjonsretning til de sub-tropiske og sub-polare gyrene i verdenshavene. Omarbeidet figur fra https://en.wikipedia.org/wiki/Ocean_current.

5.4.8 Oppsummering

Ekman-teorien så langt er oppsummert i figur 67. Gangen er som følger:

1. I overflaten er τ gitt av \mathbf{u}_{10m} . Vi kan videre uttrykke \mathcal{F} som en funksjon av τ .
2. I Ekman-laget *definerer* vi Ekman-transporten \mathbf{M}_{Ek} som den totale (integrerte) masse-transporten fra overflaten ned til bunnen av Ekman-laget. Videre integrerer vi den ageostrofiske momentumbalansen over Ekman-laget som gir (2) i figur 67. \mathbf{M}_{Ek} er rettet 90 grader til høyre for τ på den nordlige halvkule (til venstre på den sørlige halvkule).
3. I Ekman-laget gjelder både geostrofi og ageostrofi, det siste pga. vindstressets virkning. *For dynamikk som er begrenset til 1000–2000 km i meridional retning – som er en god tilnærming for Ekman-laget – kan $\partial f / \partial y$ neglisjeres.* Under denne forutsetning er $\nabla_h \cdot \mathbf{u}_g = 0$. Integreres kontinuitetsligningen for \mathbf{u}_{ag} over Ekman-laget, gir dette vertikal fart w_{Ek} gjennom Ekman-lagets nedre grenseflate. Typisk verdi for $|w_{Ek}|$ er noen titalls m per år.
4. I termoklinen gjelder geostrofisk balanse (siden friksjonsvirkningen av overflatevind er, per definisjon, begrenset til Ekman-laget). Integrasjon av kontinuitetsligningen mellom ter-

moklinen og Ekman-lagets nedre grenseflater, og når vi betrakter storskala bevegelse slik at $\partial f/\partial y$ ikke kan neglisjeres, gir oss geostrofisk hastighet \mathbf{u}_g i termoklinen. Dette punktet adresseres i avsnitt 5.4.9.



Figur 67: Illustrasjon av gangen i Ekman-dynamikk, fra havets overflate til termoklinen. Se tekst for forklaring.

5.4.9 Respons av Ekman-pumping under Ekman-laget (§10.2.1)

Under Ekman-laget er det per definisjon ikke direkte friksjonspådrag fra overflatevind, som betyr at geostrofisk tilnærming (469) gjelder. Vi kan benytte kontinuitetsligningen for en inkompressibel væske, $\nabla \cdot \mathbf{u} = 0$ med $\mathbf{u} = \mathbf{u}_g + w \hat{\mathbf{z}}$, til å bestemme geostrofisk strøm i termoklinen.

I utledningen under betrakter vi storskala bevegelse, dvs. at $\partial f/\partial y$ ikke kan neglisjeres (faktisk er det kun mulig å bestemme sirkulasjonen i termoklinen under Ekman-laget under forutsetning av at $\partial f/\partial y$ er forskjellig fra null).

Horisontal divergens til geostrofisk strøm er

$$\nabla_h \cdot \mathbf{u}_g = \frac{\partial}{\partial x} \left(-\frac{1}{f \rho_{\text{ref}}} \frac{\partial p}{\partial y} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{1}{f \rho_{\text{ref}}} \frac{\partial p}{\partial x} \right) \quad (490)$$

Utfører vi derivasjonen på uttrykkene i parentes, og benytter at $f = f(y)$, dvs. at vi betrakter meridional bevegelse med utstrekning på mer enn 2000 km, får vi

$$\nabla_h \cdot \mathbf{u}_g = -\frac{1}{f \rho_{\text{ref}}} \frac{\partial^2 p}{\partial x \partial y} + \frac{1}{f \rho_{\text{ref}}} \frac{\partial^2 p}{\partial x \partial y} - \frac{1}{f^2} \frac{1}{\rho_{\text{ref}}} \frac{\partial p}{\partial x} \frac{\partial f}{\partial y} \quad (491)$$

De to første leddene kansellerer hverandre, mens $v_g = (1/f \rho_{\text{ref}}) (\partial p/\partial x)$ kan brukes i det siste

leddet. Dette gir

$$\nabla_h \cdot \mathbf{u}_g = -\frac{\beta}{f} v_g \quad (492)$$

I uttrykket over

$$\boxed{\beta \equiv df/dy} \quad (493)$$

med dimensjon $1/(\text{m s})$. Siden f øker med y for alle verdier av y (også på den sørlige halvkule), er $\beta > 0$ for alle φ (se også uttrykk 499).

Virkingen på dynamikken hvor β inngår kalles β -effekten.

Kontinuitetsligningen uttrykt med \mathbf{u}_g er

$$\nabla_h \cdot \mathbf{u}_g + \frac{\partial w}{\partial z} = 0 \quad (494)$$

Uttrykk (492) innsatt i (494) gir sammenhengen mellom meridional geostrofisk hastighet v_g og vertikal hastighet w siden

$$\beta v_g = f \frac{\partial w}{\partial z} \quad (495)$$

Integrerer vi (495) fra termoklinen $z = -H$ til nedre grenseflate for Ekman-laget ved $z = -\delta$, får vi

$$\beta \int_{-H}^{-\delta} v_g dz = f \int_{-H}^{-\delta} \frac{\partial w}{\partial z} dz = f (w(-\delta) - w(-H)) \quad (496)$$

Uttrykket over kan skrives som

$$\beta \int_{-H}^{-\delta} v_g dz \approx f w_{\text{Ek}} \quad (497)$$

hvor vi har brukt $w(-\delta) = w_{\text{Ek}}$ og vi har antatt $w_{\text{Ek}} \gg w(-H)$.

Vi kan bruke (497) for å estimere forskjellen i størrelsen til v_g og w_{Ek} . Uttrykk (497) gir

$$\bar{v}_g (H - \delta) \approx \frac{f}{\beta} w_{\text{Ek}} \quad (498)$$

hvor \bar{v}_g er en typisk (midlet) meridional (nord-sør rettet) hastighet i havet under Ekman-laget.

Siden $H \gg \delta$, er differansen $H - \delta \approx H$. Videre følger det fra definisjonen av buelengden (se avsnitt A.1.3) at $dy = a d\varphi$, slik at

$$\beta = \frac{df}{dy} = \frac{1}{a} \frac{df}{d\varphi} = \frac{2\Omega}{a} \cos \varphi \quad (499)$$

hvor a er jordens radius. Uttrykk (498) kan derfor skrives som

$$\bar{v}_g \approx \frac{f}{\beta} \frac{w_{\text{Ek}}}{H} = \frac{2\Omega \sin \varphi}{(2\Omega/a) \cos \varphi} \frac{w_{\text{Ek}}}{H} \quad (500)$$

eller

$$\boxed{\bar{v}_g \approx \frac{a}{H} \tan \varphi w_{\text{Ek}}} \quad (501)$$

Med en typisk dybde på termoklinen H på 300–500 m, jordens radius $a = 6.37 \cdot 10^6$ m og for midlere breddegrader $\varphi = 45^\circ$, følger det at

$$\boxed{\bar{v}_g \approx 10^4 w_{\text{Ek}}} \quad (502)$$

Typisk verdi for Ekman-pumpingen er $30 \text{ m } \text{år}^{-1}$, som derfor gir en meridional hastighet midlet over termoklinen \bar{v}_g på rundt 1 cm s^{-1} .

Merk at fortegnet til \bar{v}_g bestemmes av fortegnet til produktet $\tan \varphi w_{\text{Ek}}$. På den nordlige halvkule er det, som et eksempel, sørlig rettet meridional strøm ($\bar{v}_g < 0$) i de sub-tropiske gyrene siden vi her har Ekman-pmping ($w_{\text{Ek}} < 0$).

Årsaken til sørlig rettet meridional strøm når $w_{\text{Ek}} < 0$ følger av Taylor-Proudman teoremet, se avsnitt 5.4.10.

5.4.10 Meridional hastighet ved Ekman-pumping forklart med Taylor-Proudman teoremet (§10.2.3)³⁴

Taylor-Proudman teoremet kan uttrykkes som

$$\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial \hat{\mathbf{z}}_\Omega} = 0 \quad (503)$$

hvor $\hat{\mathbf{z}}_\Omega$ er retningen til jordens rotasjonsakse. Antagelsene for TP-teoremet er at

- vi betrakter en homogen og roterende væske,
- at sirkulasjonen er stasjonær (at sirkulasjonen ikke varierer i tid; $\partial/\partial t = 0$),
- at friksjonen er neglisjerbar og
- at Rossbytallet $R_0 \ll 1$.

For disse antagelsene uttrykker (503) at komponentene til \mathbf{u} er konstant i retningen til jordens rotasjonsakse.

Ved Ekman-pumping føres vann ned gjennom nedre grenseflate av Ekman-laget. En tenkt væske-søyle (kalt en Taylor-søyle) rettet langs $\hat{\mathbf{z}}_\Omega$ kan da endres på to måter; ved at sylinders radius øker (venstre del av figur 68) eller at søylens høyde øker (høyre del av figur 68). Begge tilfellene tilfredsstillter (503).

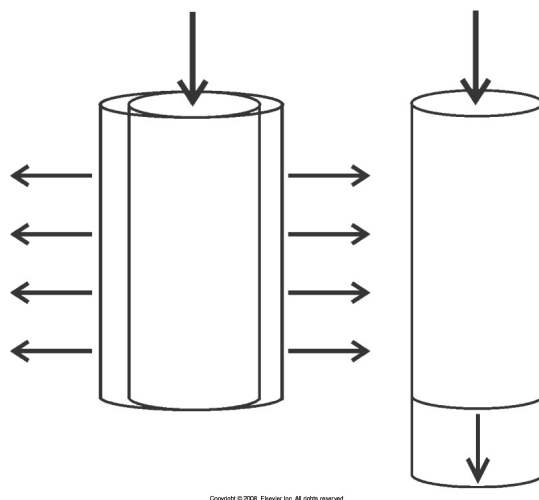
Spinnsatsen anvendt på alternativet til venstre i figur 68 gir at endringen i azimutal hastighet δu_θ er gitt ved (se utledning som leder til uttrykk 274)

$$\delta u_\theta = -2 \Omega \delta r \quad (504)$$

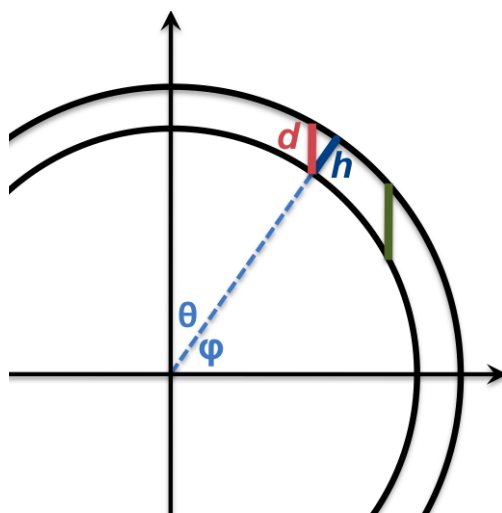
(504) sier at δu_θ avtar når sylinders radius r øker. At hastighetskomponenten δu_θ endrer seg som følge av Ekman-pumpingen strider mot en av TP-teoremets antagelser, nemlig at $\partial/\partial t = 0$. Følgelig kan ikke Taylor-søylen endre seg som vist til venstre i figur 68.

Alternativ 2 er i tråd med TP-teoremet. Den eneste muligheten søylens høyde kan øke (når Ekman-pumpingen er rettet ned i havet, det vil si for $w_{\text{Ek}} < 0$), er at søylen beveger seg mot ekvator. Dette er illustrert i figur 69 hvor Taylor-søylen med høyde d for breddegrad φ (rød farge) øker sin høyde når den beveger seg mot ekvator (grøn farge).

³⁴Se også diskusjon i seksjon 4.1-4.4 i *LECTURES ON DYNAMICAL METEOROLOGY* av Roger K. Smith, Version: December 11, 2007.



Figur 68: Figur 10.14 i Marshall & Plumb (2008).



Figur 69: Illustrasjon på en Taylor-søyle med høyde d (rød strek) plassert i et hav med tykkelse h (mørk blå strek). Når søylen beveger seg mot ekvator, vil søylens høyde øke (grøn farge).

Det siste kan vises geometrisk basert på vinklene i figur 69 og ved å betrakte pumping av vann ned i (eller opp av) en sylinder som representerer en Taylor-søyle. Detaljer er gitt i appendix D.

Begge tilnærmingene gir at den vertikalt integrerte meridionale hastigheten generert av w_{Ek} er 10^3 til 10^4 ganger større enn Ekman-pumpingen selv. Mekanismen for denne akselerasjonen er Taylor-søylens bevegelse mot ekvator for $w_{\text{Ek}} < 0$ og – helt tilsvarende – bort fra ekvator for $w_{\text{Ek}} > 0$. Som tidligere nevnt er typisk verdi for Ekman-pumpingen på 30 m år⁻¹, som gir en meridional hastighet $v \approx 1 \text{ cm s}^{-1}$.

5.4.11 Konseptuell oppsummering av Ekman-teorien for sonal vind

Ekman-teorien – dersom vi bare betrakter sonal vind (uttrykk 488) for enkelhets skyld – kan oppsummeres som illustrert i figur 70:

Rød farge Sonal overflatevind er rettet i hht. storskala, atmosfærisk sirkulasjon.

Blå farge Ekman-transport i Ekman-laget er rettet 90 grader til høyre for vindretningen på den nordlige halvkule (venstre på den sørlige halvkule).

Grønn farge Konvergens av Ekman-transport gir nedoverrettet pumping i havet, kalt Ekman-pumping. Dette skjer i de subtropiske gyrene mellom 15. og 45. breddegrad. Divergens av Ekman-transport gir oppoverrettet løfting av vannmasser i havet, kalt Ekman-løfting. Dette skjer i de subpolare gyrene fra 45. breddegrad og mot polene.

Oransje farge Ekman-pumping genererer meridional transport i termoklinen, under Ekman-laget, rettet mot ekvator. Ekman-løfting genererer meridional transport rettet bort fra ekvator.

Rød tekst Områdene med null, vertikal Ekman-fart definerer overgangen fra subtropiske og subpolare gyrer (som også er hvor f.eks. Golf- og Kuroshiostrømmen – og forlengelsen av disse – ligger).

Virkingen av meridional vind er at inndelingen av gyrene – og overgangen mellom gyrene hvor randstrømmene som Golf- og Kuroshiostrømmene ligger – ikke er perfekt rettet i sonal retning. Vi kommer tilbake til dette i gjennomgangen av Sverdrup-teorien i avsnitt 5.5.

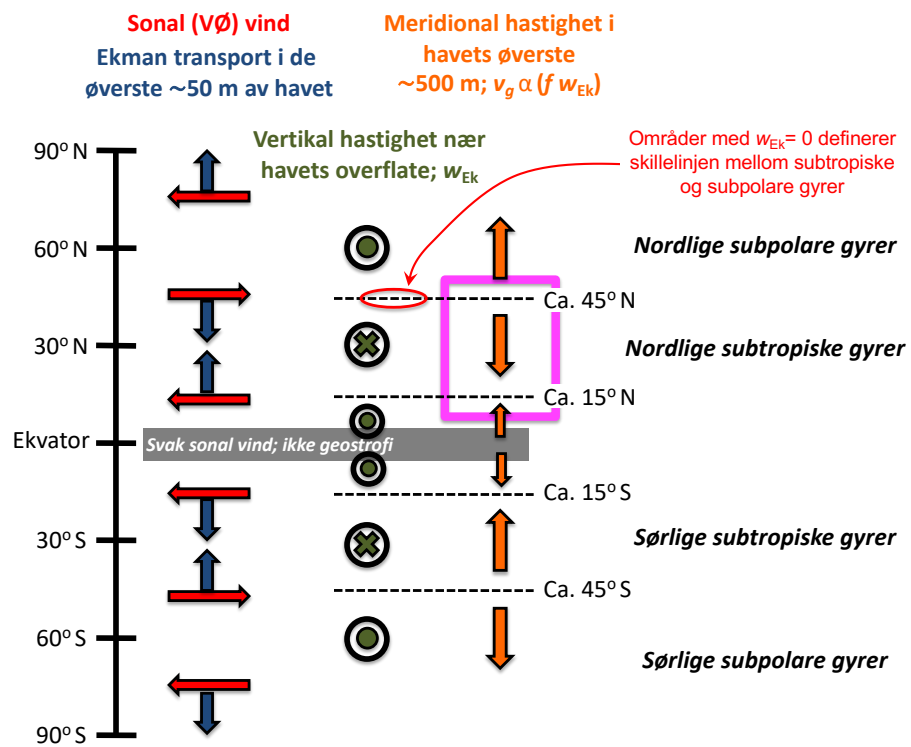
5.4.12 Vestlig randstrøm

Selv om Ekman-dynamikken gjelder for et hav med uendelig utstrekning, kan vi argumentere for hva som vil skje dersom vi innfører land i vest og øst (mer om dette i avsnittet om Sverdrupdynamikk, avsnitt 5.5).

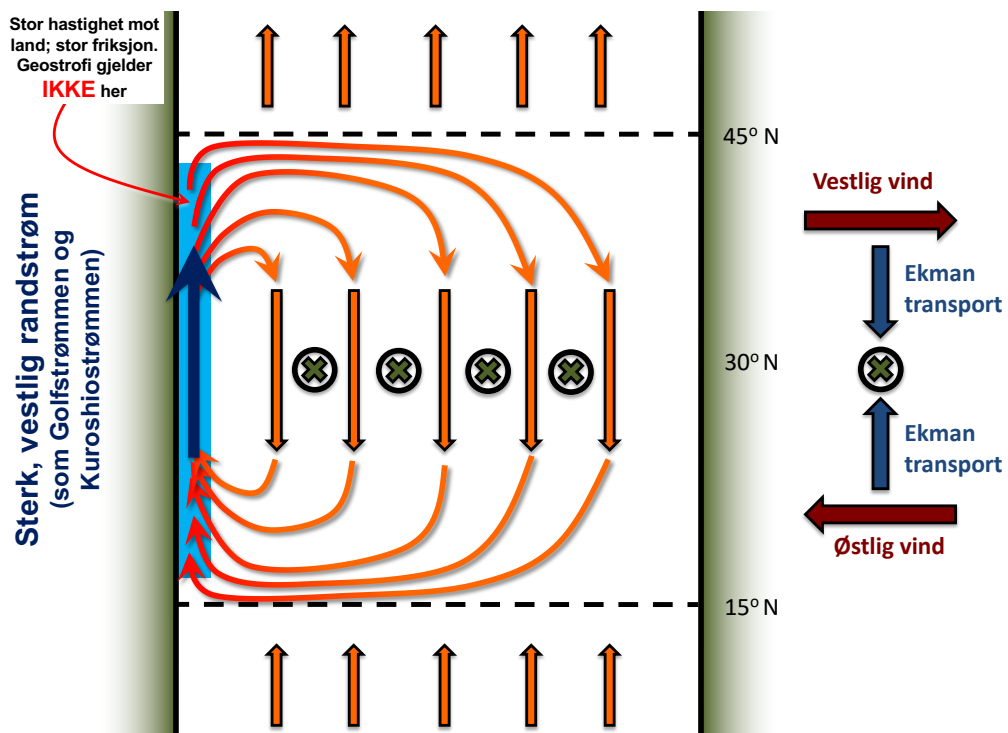
Situasjonen for de subtropiske gyrene på den nordlige halvkule, illustrert med den magenta boksen i figur 70, er vist i figur 71.

Følgende argumentasjonsrekkefølge kan benyttes til å forklare nødvendigheten av vestlig randstrøm (tilsvarende argumentasjon gjelder for de andre gyrene):

- Vinddrevet sirkulasjon er *lukket* i meridional retning: I figur 71 er $w_{\text{Ek}} = 0$, og med det $V_g = 0$, ved (omtrentlig) 15° og 45° N. Det er ikke mulig for meridional strøm å krysse disse breddegradene.
- Sirkulasjonen følger vindretningene, dvs. *med* klokken i figur 71. Dette da vindene *må* overføre energi til havet for å motvirke havets tap av energi mot bunn og kontinenter, spesielt mot land i vest.



Figur 70: Illustrasjon av Ekman-teorien dersom vi bare betrakter sonal vind, dvs. sonalt vindstress. Sonal vind er vist med rød farge, Ekman-transport med blå farge, Ekman-pumping med grønn farge, og meridional hastighet i termoklinen i oransje farge. Den lilla rammen gir utsnittet vist i figur 71.



Figur 71: Illustrasjon av sirkulasjonen i de subtropiske gyrene på den nordlige halvkule, med utsnitt tilsvarende den magenta boksen i figur 70. Fargelegging som i figur 70. Se tekst for forklaring.

- Følger Sverdrup-teori (avsnitt 5.5).
- Følger bevaring av virvling (pensum i GEOF213).
- Følger av vestlig forplantning av Rossbybølger³⁵ (pensum i GEOF213).

5.5 Sverdrupbalanse³⁶ (§10.3)

I motsetning til Ekman teorien, betrakter vi nå vinddrevet havsirkulasjon fra havets bunn ($z = -D$) til overflaten, og for et hav avgrenset av kontinenter i vest og øst.

Siden Sørishavet ikke er avgrenset av kontinenter, gjelder ikke Sverdrupbalansen for dette havområdet. Men Sverdrupbalansen beskriver ellers havbassengenes respons til vind. Sverdrupbalansen beskriver også, i motsetning til geostrofi, sirkulasjonen ved ekvator.

Antagelsene for Sverdrupbalansen er $R_0 \ll 1$, at tettheten $\rho = \rho_{\text{ref}}$ (det vil si konstant tetthet) og at friksjonen mot bunn og sider (kontinentene) er liten³⁷.

Utledningen av Sverdrupbalansen følger utledningen av termoklinens respons til Ekman-pumping, se avsnitt 5.4.9.

Vi starter med de grunnleggende ligningene for vinddrevet havsirkulasjon med konstant tetthet, se (467):

$$\begin{aligned} \frac{1}{\rho_{\text{ref}}} \frac{\partial p}{\partial x} - f v &= \frac{1}{\rho_{\text{ref}}} \frac{\partial \tau_x}{\partial z} \\ \frac{1}{\rho_{\text{ref}}} \frac{\partial p}{\partial y} + f u &= \frac{1}{\rho_{\text{ref}}} \frac{\partial \tau_y}{\partial z} \end{aligned} \quad (505)$$

Trykk-leddene i (505) kan elimineres ved å derivere den første ligningen med $-\partial/\partial y$ og den andre ligningen med $\partial/\partial x$, for så å addere de to ligningene.

Alternativt søker vi differansen

$$\frac{\partial \tau_y}{\partial x} - \frac{\partial \tau_x}{\partial y}$$

siden denne gir opphav til konvergens/divergens i Ekman-laget, se uttrykk (486).

Dette gir for hver av ligningene

$$\begin{aligned} \beta v + f \frac{\partial v}{\partial y} - \frac{1}{\rho_{\text{ref}}} \frac{\partial^2 p}{\partial x \partial y} &= -\frac{1}{\rho_{\text{ref}}} \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{\partial \tau_x}{\partial y} \right) \\ f \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{1}{\rho_{\text{ref}}} \frac{\partial^2 p}{\partial x \partial y} &= \frac{1}{\rho_{\text{ref}}} \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{\partial \tau_y}{\partial x} \right) \end{aligned} \quad (506)$$

Summert, og ved å bruke kontinuitetsligningen $\nabla_h \cdot \mathbf{u} + \partial w / \partial z = 0$, gir dette

$$\beta v = f \frac{\partial w}{\partial z} + \frac{1}{\rho_{\text{ref}}} \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{\partial \tau_y}{\partial x} - \frac{\partial \tau_x}{\partial y} \right) \quad (507)$$

³⁵Se animasjon <http://www.youtube.com/watch?v=5P5493bgBsA>.

³⁶Se også seksjon 6.3 i *LECTURES ON DYNAMICAL METEOROLOGY* av Roger K. Smith, Version: December 11, 2007.

³⁷Som vi skal se må vi da holde oss borte fra vestlig rand grunnet høy strømfart og dermed stor friksjon der. Dette betyr at Sverdrupbalansen er gyldig inntil (ca.) 100–200 km fra vestlig kyst.

Integrerer vi (507) over hele vannsøylen, fra $z = -D$ til $z = 0$ ³⁸, får vi

$$\beta \int_{-D}^0 v dz = f [w(0) - w(-D)] + \frac{1}{\rho_{\text{ref}}} \left(\frac{\partial \tau_{\text{vind},y}}{\partial x} - \frac{\partial \tau_{\text{vind},x}}{\partial y} \right) \quad (508)$$

Siden $w(0) = w(-D) = 0$, kan (508) skrives som

$$\beta V = \frac{1}{\rho_{\text{ref}}} \left(\frac{\partial \tau_{\text{vind},y}}{\partial x} - \frac{\partial \tau_{\text{vind},x}}{\partial y} \right) = \frac{1}{\rho_{\text{ref}}} \hat{\mathbf{z}} \cdot \nabla \times \boldsymbol{\tau}_{\text{vind}} \quad (509)$$

der

$$V \equiv \int_{-D}^0 v dz \quad (510)$$

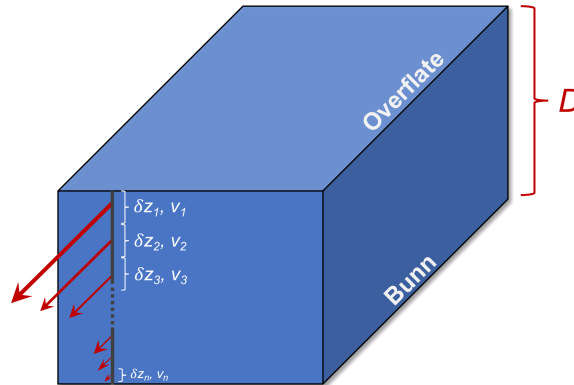
er dybde-integrert meridional transport med enhet m^2/s , se figur 72.

Siden $\beta > 0$ for alle φ , gjelder Sverdrupbalansens dybde-integrert meridional transport

$$V = \frac{1}{\beta \rho_{\text{ref}}} \left(\frac{\partial \tau_{\text{vind},y}}{\partial x} - \frac{\partial \tau_{\text{vind},x}}{\partial y} \right) \quad (511)$$

også for ekvator. Dette i motsetning til alle andre geostrofi-baserte uttrykk som inkluderer f i nevneren (siden $f \rightarrow 0$ når $|\varphi| \rightarrow 0$).

Uttrykket (509), med definisjonen i (510), er Sverdrupbalansen; en av de mest brukte sammenhengene for å beskrive sirkulasjonen i verdenshavene.



Figur 72: Illustrasjon av hva som menes med dybdeintegrert, meridional transport i et hav med n lag med tykkelse δz_i og fart v_i : $V = \int_{z=-D}^0 v dz = \sum_{i=1}^n v_i \delta z_i$, hvor $\sum_{i=1}^n \delta z_i = D$.

Fra (509) følger det at den vertikalintegrerte meridionale hastigheten V er lik null for $\nabla \times \boldsymbol{\tau}_{\text{vind}} = \mathbf{0}$. Derfor kan $\nabla \times \boldsymbol{\tau}_{\text{vind}} = \mathbf{0}$ (null vindstress-kurl) brukes til å definere de storstilte gyrene i havet.

Siden $\beta > 0$ for alle φ , følger det videre fra (509) at

$$V \quad \text{har samme fortegn som vindstress-kurlen} \quad \hat{\mathbf{z}} \cdot \nabla \times \boldsymbol{\tau}_{\text{vind}} = \frac{\partial \tau_{\text{vind},y}}{\partial x} - \frac{\partial \tau_{\text{vind},x}}{\partial y} \quad (512)$$

³⁸I utg.pkt. kan vi integrere til havets frie overflate, $z = \eta$, men vi følger boken og definerer havets overflate ved $z = 0$. Resultatet blir uansett det samme.

5.5.1 Sverdrupbalanse, geometrisk tolkning (§10.2.3)

For dybdeintegrert strøm $\mathbf{U} = (U, V)$ kan det ikke være kilder eller sluk slik at kontinuitetsligningen gir

$$\nabla_h \cdot \mathbf{U} = 0 \quad (513)$$

For en divergensfri strøm eksisterer det alltid en *strømfunksjon* ψ (en skalar; enhet $\text{m}^2 \text{ s}^{-1}$) gitt ved

$$U = -\frac{\partial\psi}{\partial y} \quad \text{og} \quad V = \frac{\partial\psi}{\partial x} \quad (514)$$

Strømfunksjonen er nyttig da strømmen følger strømfunksjonens isolinjer, og at strømstyrken er proporsjonal med hvor tett strømfunksjonens isolinjer ligger. Selv om dette tidligere ikke er eksplisitt sagt, er konseptet med strømfunksjon vanlig for å beskrive geostrofisk strøm, se appendix E.

At strømfunksjonen gitt ved (514) tilfredsstillers (513) følger av at

$$\begin{aligned} \nabla_h \cdot \mathbf{U} &= \frac{\partial U}{\partial x} + \frac{\partial V}{\partial y} \\ &= \frac{\partial}{\partial x} \left(-\frac{\partial\psi}{\partial y} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial\psi}{\partial x} \right) \\ &= -\frac{\partial^2\psi}{\partial x\partial y} + \frac{\partial^2\psi}{\partial x\partial y} \\ &= 0 \end{aligned} \quad (515)$$

Sverdrup-balansen uttrykt ved (509) kan derfor skrives som

$$\beta V = \beta \frac{\partial\psi}{\partial x} = \frac{1}{\rho_{\text{ref}}} \left(\frac{\partial\tau_{\text{vind},y}}{\partial x} - \frac{\partial\tau_{\text{vind},x}}{\partial y} \right) \quad (516)$$

eller

$$\frac{\partial\psi}{\partial x} = \frac{1}{\beta \rho_{\text{ref}}} \left(\frac{\partial\tau_{\text{vind},y}}{\partial x} - \frac{\partial\tau_{\text{vind},x}}{\partial y} \right) \quad (517)$$

Skalarstørrelsen ψ kan nå bestemmes ved å integrere (517) i x -retningen. Når skalarfunksjonen ψ er kjent, følger U, V direkte fra (514).

Det at en skalarfunksjon (i vårt tilfelle ψ) bestemmer et hastighetsfelt (\mathbf{U}) gjør at strømfunksjonen er en ofte benyttet metode for å bestemme divergensfri strøm.

5.5.2 Løsningsmetode, Sverdrupbalanse

Siden det ikke kan være transport på tvers av kontinentene, må $U = 0$, det vil si at $\psi = \text{konst.}$ i (514), langs (en av) kontinentene.

Uttrykk (517) er en første ordens differensialligning slik at vi bare kan foreskrive én grenseflatebetingelse. Grunnet stor hastighet mot vestlig kyst (gjelder for begge halvkuler, tenk f.eks. på Atlanterhavets Golfstrøm og Brasilstrøm, se også under), bryter Sverdrupbalansen sammen ved vestlig kyst. Følgelig må $U = 0$ langs østlig kyst, som betyr $\psi = \text{konst.}$ fra første uttrykk i 514.

Vi integrerer derfor (517) fra østlig kyst og vestover, dvs. i negativ x -retning, for å bestemme ψ .

Med valget $\psi = 0$ ved østlig kyst³⁹ følger det at

$$\psi(x, y) = \frac{1}{\beta \rho_{\text{ref}}} \int_{x_{\text{øst}}}^x \left(\frac{\partial \tau_{\text{vind}, y}}{\partial x} - \frac{\partial \tau_{\text{vind}, x}}{\partial y} \right) dx \quad (518)$$

hvor $x < x_{\text{øst}}$.

Vindene blåser, til laveste orden, i sonal (x -) retning. Derfor er (518) tilnærmet gitt ved

$$\psi(x, y) \approx -\frac{1}{\beta \rho_{\text{ref}}} \int_{x_{\text{øst}}}^x \left(\frac{\partial \tau_{\text{vind}, x}}{\partial y} \right) dx \quad (519)$$

Dersom i tillegg vinden antas å være tilnærmet konstant i sonal retning, betegnet $\bar{\tau}_{\text{vind}, x}$, kan (519) forenkles til

$$\begin{aligned} \psi(x, y) &\approx -\frac{1}{\beta \rho_{\text{ref}}} \frac{\partial \bar{\tau}_{\text{vind}, x}}{\partial y} (x - x_{\text{øst}}) \\ &= \frac{1}{\beta \rho_{\text{ref}}} \frac{\partial \bar{\tau}_{\text{vind}, x}}{\partial y} (x_{\text{øst}} - x) \end{aligned} \quad (520)$$

Størrelsen $\beta > 0$ for alle breddegrader og $(x_{\text{øst}} - x) > 0$, hvor siste sammenheng følger av at x avtar i vestlig retning. Fortegnet til ψ er derfor bestemt av fortegnet til $\partial \bar{\tau}_{\text{vind}, x} / \partial y$ i uttrykk (520). Derfor er $\psi > 0$ når det sonale vindstresset $\tau_{\text{vind}, x}$ øker med økende breddegrad, og vice versa.

5.5.3 Hastighetskomponentene U, V fra ψ

Hastighetskomponentene U og V følger fra (514) når vi kjenner ψ :

$$U = -\frac{\partial \psi}{\partial y} \quad \text{og} \quad V = \frac{\partial \psi}{\partial x}$$

Dersom sonalt vindstress varierer lineært i meridional retning, følger det fra uttrykk (520) at

$$U = 0 \quad (521)$$

og

$$V = -\frac{1}{\beta \rho_{\text{ref}}} \frac{\partial \bar{\tau}_{\text{vind}, x}}{\partial y} \quad (522)$$

For et vilkårlig (tilfeldig varierende) vindstress, vil også U ha en avhengighet av vindstresset, tilsvarende som for V over.

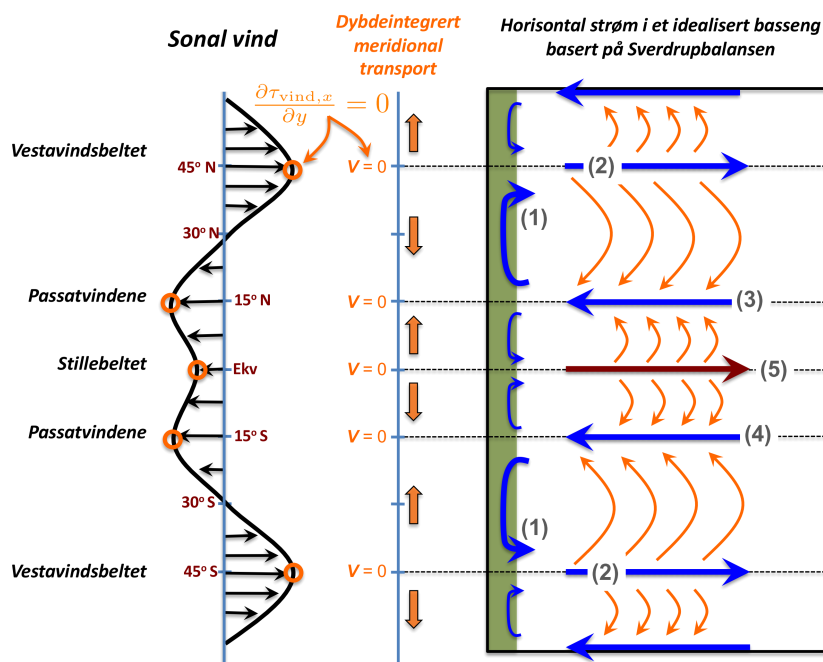
5.5.4 Vertikalintegrert, meridional strøm (Sverdrupsirkulasjon) for sonal vind

Hovedtrekkene for vertikalintegrert, vinddrevet havsirkulasjon V (unntatt Sørishavet) følger altså av fortegnet til hvordan sonalt vindstress varierer i meridional retning (fra 522):

$$V \begin{cases} > 0 \\ = 0 \\ < 0 \end{cases} \quad \text{for} \quad \frac{\partial \bar{\tau}_{\text{vind}, x}}{\partial y} \begin{cases} < 0 \\ = 0 \\ > 0 \end{cases} \quad (523)$$

³⁹Enhver konstant verdi av ψ langs østlig kyst er mulig, men siden U, V er gitt av den deriverte av ψ i y, x -retningene, velger vi $\psi = 0$.

Dette er vist i figur 73. Til venstre sees sonal vind på jorden med stillebeltet ved ekvator, passatvindene til (ca.) 30. breddegrad og vestavindsbeltene fra (ca.) 30. breddegrad.



Figur 73: Oversikt over Sverdrup-dynamikk for alle breddegrader unntatt Sørishavet. Figuren gjelder også for termoklinen basert på Ekman-dynamikk. Oppdatert fra figur 10.20 i M&P.

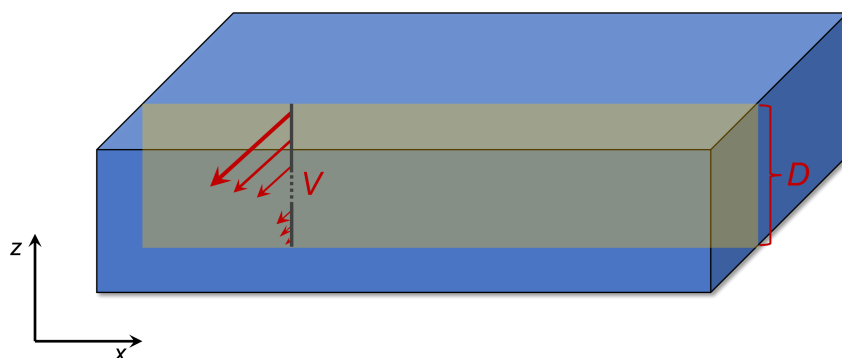
Som for Ekman-dynamikk definerer $\partial\tau_{\text{vind},x}/\partial y = 0$ overgangen mellom gyrene. Vertikalintegret, meridional strøm er vist med oransje piler i midterste og høyre panel.

For høyre del av figuren gjelder følgende:

1. Vestlig randstrøm er alltid lokalisert mot vestlig kontinent (grønn fargelegging). Her gjelder *ikke* geostrofisk balanse grunnet høy hastighet mot land, dvs. stor friksjon.
2. Golfstrømmen/Kuroshiostrømmen på den nordlige halvkule og Brasilstrømmen på den sørlige halvkule ligger på overgangen mellom de subtropiske og sub-polaree gyrer.
3. Den nordlige ekvatorialstrøm ligger på rundt 15 grader nord.
4. Den sørlige ekvatorialstrøm ligger på rundt 15 grader sør.
5. Langs ekvator finnes Den ekvatoriale motstrøm som er rettet *mot* vindretningen grunnet (i) konvergens ved vestlig kyst ved ekvator og (ii) at sonal vind ved ± 15 breddegrad er sterkere enn sonal vind ved ekvator. Det siste betyr at masseopphopningen ved vestlig kyst ved ekvator er styrt av styrken til ekvatorialstrømmene (3) og (4).

5.5.5 Utregning av volumtransport basert på Sverdrupbalanse

I eksempelet over vil volumtransporten i Sv ($\text{m}^3 \text{s}^{-1}$) i et havbasseng, som illustrert i figur 74, følge ved å integrere V fra (522) på tvers av havbassenget i x -retningen (og tilsvarende for U fra (521) i y -retningen dersom vi inkluderer meridional vind).



Figur 74: Volumtransport kan beregnes på tvers av et havbasseng ved å integrere V , dvs. summere, V (m^2/s) fra (522) fra kontinent til kontinent, dvs. i x -retningen langs det gråfargede snittet.

5.5.6 Løsning for sonal vind, Stillehavet

Figur 75 fra Stillehavet viser en volumtransport $M_v \approx 50 \text{ Sv}$ like sørøst for Japan ved 30° N . I tråd med figur 74 kan denne verdien (omtrentlig) beregnes ved å integrere V -komponenten (522) fra ca. 160° Ø til 100° V , eller over en distanse tilsvarende 100 breddegrader:

$$M_v = - \int_{160^\circ \text{ Ø}}^{100^\circ \text{ V}} \frac{1}{\beta \rho_{\text{ref}}} \frac{\partial \bar{\tau}_{\text{vind},x}}{\partial y} dx = - \frac{1}{\beta \rho_{\text{ref}}} \frac{\partial \bar{\tau}_{\text{vind},x}}{\partial y} \Delta x \approx -42 \text{ Sv} \quad (524)$$

I uttrykket over er

- $\beta = 2 \times 10^{-11} \text{ 1}/(\text{ms})$
- $\rho_{\text{ref}} = 1024 \text{ kg}/\text{m}^3$
- $\partial \bar{\tau}_{\text{vind},x} / \partial y = 9 \times 10^{-8} \text{ N m}^{-3}$, hvor verdi er lest ut som stigningstallet til vindstresset i meridional retning i panelet til venstre i figur 75, med $\delta \bar{\tau}_{\text{vind},x} \approx 0.2 \text{ N}/\text{m}^2$ og δy tilsvarende en avstand på 20 breddegrader
- $\Delta x = (100 \cdot 111 \cdot 10^3) \cdot \cos 30^\circ \text{ m}$

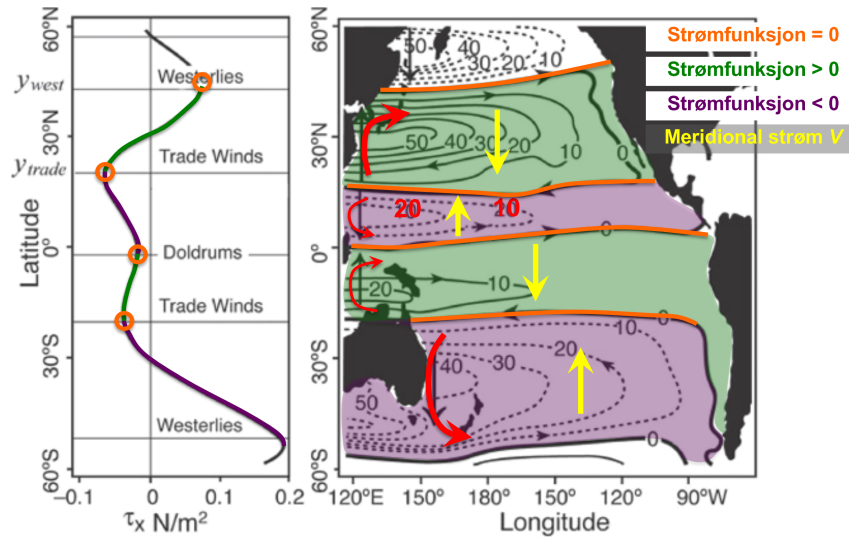
Resultatet på -42 Sv er (relativt) nær den faktiske verdien på -50 Sv , med den største feilkilden fra estimert verdi av $\partial \bar{\tau}_{\text{vind},x} / \partial y$.

Tilsvarende kan volumtransporten estimeres for alle punkt i havet hvor Sverdrup-balansen gjelder.

Merk at figur 75 er basert på vindstresskomponenter i både x - og y -retningene. Det er dette som er årsaken til at isolinjene avviker noe fra sonal retning og at noen av null-isolinjene ikke er rettet i perfekt sonal retning.

Fra figur 75 ser vi videre at sonalt midlet vindstress $\bar{\tau}_{\text{vind},x}$ avtar fra 50° til 20° S , og fra ekvator til 20° N . Dette gir $V > 0$ og sirkulasjon mot klokken på begge halvkuler (stiplede isolinjer). Tilsvarende, fra 20° S til ekvator, og fra 20° til 45° N , øker sonalt midlet vindstress som innebærer $V < 0$ og sirkulasjon med klokken (heltrukne isolinjer).

Betrakter vi breddegradsintervallet mellom 50° og 20° S , er det her en netto nordgående strøm. Den nordgående strømmen må kompenseres med en sørgående strøm. Kompensasjonsstrømmen er *alltid* lokalisert mot vestlig kyst, i dette tilfellet utenfor østkysten av Australia.



Copyright © 2008, Elsevier Inc. All rights reserved.

Figur 75: Venstre: Sonalt midlet vindstress for Stillehavet. Høyre: Sverdruptransport (i Sv) beregnet fra (518). Omarbeidet figur 10.21 i M&P. (Merk at de to verdiene for Sverdruptransporten ved ca. 10° N er byttet om i originalfiguren; absoluttverdi av Sverdruptransporten skal øke når en går fra østlig til vestlig kyst (se uttrykk 520). Konturverdiene ved ca. 10° N skal derfor være -10 og -20 Sv når en går vestover.)

På tilsvarende måte er det en sørgående transport i havbassenget mellom 20° og 45° N. Denne transporten er kompensert av en nordgående transport utenfor kysten av Kina og Japan. Dette er Kuroshio-strømmen. Tilsvarende argumentasjon gjelder for Atlanterhavet. Her er det den nordgående Golfstrømmen utenfor kysten av USA som kompenserer for sørgående Sverdruptransport mellom 20° og 45° N.

5.5.7 Eksempel, sammenheng mellom Ekman- og Sverdrup-teori

Opgave 3, side 220 i Marshall & Plumb:

Vis at summen av meridional transport under Ekman-laget og meridional transport i Ekman-laget er lik Sverdrup-transport for hele vannsøylen.

Under Ekman-laget gjelder følgende sammenheng for meridional geostrofisk transport v_g og vertikal hastighet w (se uttrykk 495)

$$\beta v_g = f \frac{\partial w}{\partial z} \quad (525)$$

Integrert fra havets bunn $z = -D$ til Ekman-lagets underside $z = -\delta$, gir dette

$$\beta \int_{z=-D}^{-\delta} v_g dz = f (w(-\delta) - w(-D)) \quad (526)$$

Det kan ikke være vertikal hastighet på havets bunn så $w(-D) = 0$, mens vertikal hastighet på undersiden av Ekman-laget er Ekman-hastigheten w_{EK} . Dette gir

$$\beta \int_{z=-D}^{-\delta} v_g dz = f w_{\text{EK}} \quad (527)$$

w_{Ek} er gitt med uttrykk (486)

$$w_{\text{Ek}} = \frac{1}{\rho_{\text{ref}}} \left(\frac{\partial}{\partial x} \frac{\tau_{\text{vind},y}}{f} - \frac{\partial}{\partial y} \frac{\tau_{\text{vind},x}}{f} \right) \quad (528)$$

For stor-skala bavegelse varierer både $\tau_{\text{vind},x}$ og f i siste derivasjon, så

$$w_{\text{Ek}} = \frac{1}{f \rho_{\text{ref}}} \left(\frac{\partial \tau_{\text{vind},y}}{\partial x} - \frac{\partial \tau_{\text{vind},x}}{\partial y} \right) + \frac{\tau_{\text{vind},x}}{f^2 \rho_{\text{ref}}} \beta \quad (529)$$

hvor $\beta = \partial f / \partial y$.

Innsatt i (527) gir dette

$$\beta \int_{z=-D}^{-\delta} v_g dz = \frac{1}{\rho_{\text{ref}}} \left(\frac{\partial \tau_{\text{vind},y}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{\text{vind},x}}{\partial y} \right) + \frac{\beta}{f \rho_{\text{ref}}} \tau_{\text{vind},x} \quad (530)$$

Meridional massetransport i Ekman-laget er, per definisjon (fra uttrykkene 476 og 478)

$$M_{\text{Ek},v} = \int_{z=-\delta}^0 \rho_{\text{ref}} v_{\text{ag}} dz = -\frac{1}{f} \tau_{\text{vind},x} \quad (531)$$

Siste ledd i 530 kan derfor uttrykkes som integralet av meridional, ageostrofisk strøm over Ekman-laget, som gir

$$\beta \int_{z=-D}^{-\delta} v_g dz = \frac{1}{\rho_{\text{ref}}} \left(\frac{\partial \tau_{\text{vind},y}}{\partial x} - \frac{\partial \tau_{\text{vind},x}}{\partial y} \right) - \beta \int_{z=-\delta}^0 v_{\text{ag}} dz \quad (532)$$

eller

$$\int_{z=-D}^{-\delta} v_g dz + \int_{z=-\delta}^0 v_{\text{ag}} dz = \frac{1}{\beta \rho_{\text{ref}}} \left(\frac{\partial \tau_{\text{vind},y}}{\partial x} - \frac{\partial \tau_{\text{vind},x}}{\partial y} \right) \quad (533)$$

Uttrykket over, som er på formen til (509) og (510), sier at summen av *meridional geostrofisk* transport i dyphavet (første integral) og *meridional ageostrofisk* transport i Ekman-laget (andre integral) er lik Sverdrup-transport (høyre side).

Noen av de følgende seksjonene er også beskrevet i hovedteksten over.

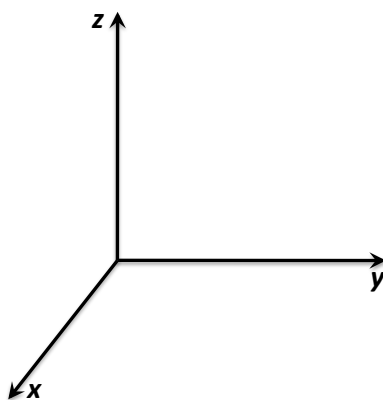
A Grunnleggende funksjon- og vektoranalyse

A.1 Koordinatsystem

Et koordinatsystem betegner n variable som bestemmer et geometrisk objekt. $n = 2$ for et todimensjonalt koordinatsystem og $n = 3$ for et tredimensjonalt system.

A.1.1 Rektangulære koordinater

Dette er et rettvinklet koordinatsystem. Kalles også et kartesisk koordinatsystem. I tre dimensjoner betegnes gjerne variablene som angir koordinatretningene for x , y og z . Orienteringen til x , y og z er gitt ved høyrehåndsregelen, se figur 76.



Figur 76: Et rettvinklet koordinatsystem i tre dimensjoner.

A.1.2 Kurvelineære polare koordinater

Dette koordinatsystemet beskrives av en eller flere vinkler relativt aksene i et rektangulært koordinatsystem, samt avstand fra origo.

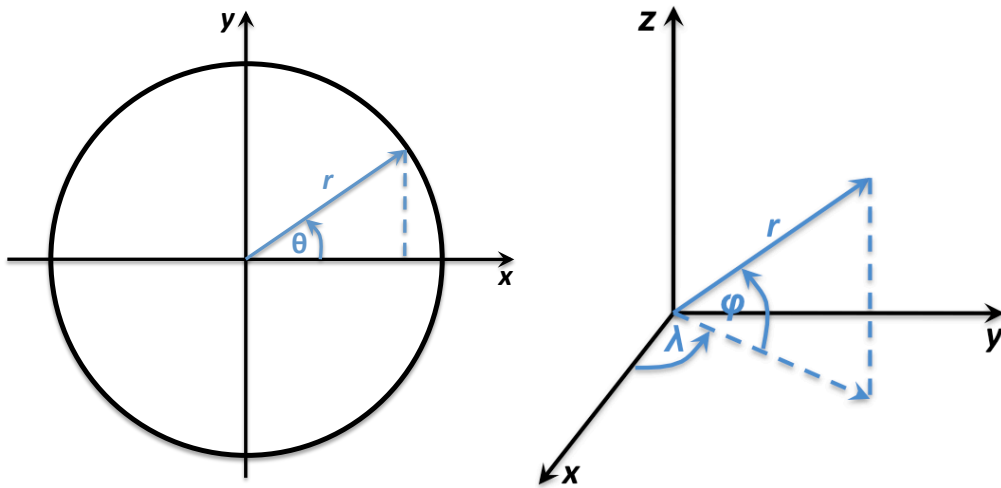
Kurvelineære polare koordinater i to og tre dimensjoner er vist i figur 77. Orienteringen til variablene som angir koordinatretningene er gitt ved høyrehåndsregelen. I to dimensjoner er gjerne koordinatvariablene r og θ . I tre dimensjoner er ofte koordinatvariablene λ , ϕ og z , som for et jordsystem angir lengdegrad (storsirkler som går gjennom polene), breddegrad (storsirkler går parallelt med ekvator) og radial koordinat.

A.1.3 Buelengde

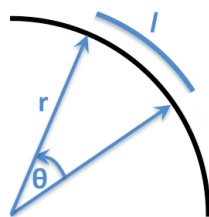
For en sirkelbue med radius r er buelengden l gitt ved

$$l = r\theta \tag{534}$$

der r er sirkelbuens radius og θ (i radianer) er vinkelen som avgrenser buelengden (se figur 78). For en sirkel er $\theta = 2\pi$, og buelengden er lik sirkelens omkrets $2\pi r$.



Figur 77: Kurvilineære koordinater i to og tre dimensjoner.



Figur 78: Buelengden l for en sirkelbue med (lokal) radius r spent ut av vinkelen θ .

A.1.4 Polare koordinater

Polare koordinater er ofte gitt ved r (radial koordinat) og θ (vinkel, polarvinkel eller asimut koordinat). Fra venstre del av figur 77 har vi at

$$x = r \cos \theta \quad (535)$$

$$y = r \sin \theta \quad (536)$$

Fra definisjonen av en buelengde, følger det at en liten endring av vinkelen θ , $\delta\theta$, spenner ut linjestykket (buelengden) $r \delta\theta$. En liten endring langs aksene r , δr , involverer ingen rotasjon og gir derfor linjestykket δr . Av dette følger at skalafaktorene for de polare kulekoordinatene, dvs. faktoren fremfor δr and $\delta\theta$, er henholdsvis

$$1 \text{ og } r. \quad (537)$$

Bruk skalafaktorene (537) til å utlede areal og omkrets av en sirkel med radius a . Hint: Integrer over koordinatvariablene.

A.1.5 Polare kulekoordinater

Polare kulekoordinater i et jordsystem er ofte gitt ved koordinatvariablene λ (lengdegrad), φ (breddegrad) og r (radial retning). Fra høyre del av figur 77 følger det at

$$x = r \cos \varphi \cos \lambda \quad (538)$$

$$y = r \cos \varphi \sin \lambda \quad (539)$$

$$z = r \sin \varphi \quad (540)$$

Fra samme figur ser vi at en liten endring av vinkelen λ , $\delta\lambda$, spenner ut linjestykket (buelengden) $r \cos \varphi \delta\lambda$, og at vinkelen φ , $\delta\varphi$, spenner ut linjestykket (buelengden) $r \delta\varphi$. En liten endring langs aksene r , δr , gir linjestykket δr . Av dette følger det at skalafaktorene for våre polare kulekoordinater er henholdsvis

$$r \cos \varphi, r \text{ og } 1. \quad (541)$$

Bruk skalafaktorene (541) til å utlede areal og volum av en kule med radius a . Hint: Integrer over koordinatvariablene.

A.2 Avstander på en kuleflate

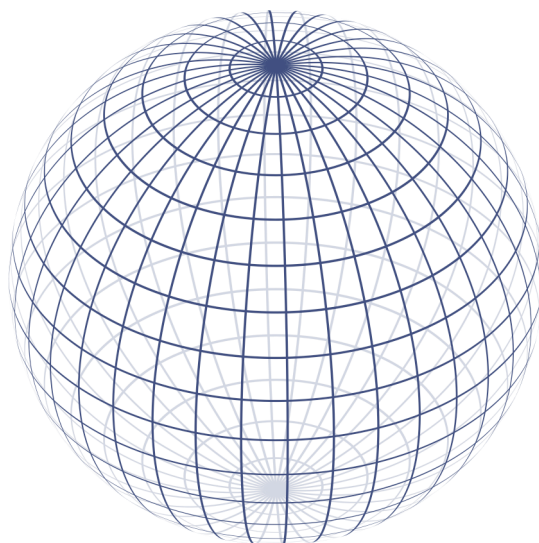
Figur 79 illustrerer bredde- og lengdegradssirkler på en kule. Det følger fra figuren at den geografiske avstanden mellom to lengdegrader avtar med økende breddegrad φ (mot polene), mens avstanden mellom to breddegrader er konstant.

Avstanden mellom to breddegradssirkler eller to lengdegradssirkler følger fra skalafaktorene for en kule, se (541). For en breddegradsvinkel $\delta\lambda = 1^\circ = \pi/180$ rad, vil utspent buelengde på jorden være $r \cos \varphi \delta\lambda$, hvor $r = 6.37 \cdot 10^6$ m er jordens radius. Dette gir at utspent buelengde er $111 \cos \varphi$ km. For en lengdegradsvinkel $\delta\varphi = 1^\circ = \pi/180$ rad, vil utspent buelengde på jorden være $r \delta\varphi$, eller 111 km.

A.3 Variabel

Variable er de størrelsene som en funksjon avhenger av.

For eksempel er har funksjonen $f(x, y)$ variablene x og y . Variablene i det rektangulære koordinatsystemet over er x , y og z , mens variablene i polare koordinater er λ , φ og r .



Figur 79: Bredde- og lengdegradssirkler på en kule. Breddegradssirklene er rettet i nord-sør retningen og er gitt ved breddegradsvinkelen φ , og lengdegradssirklene i øst-vest retningen gitt ved lengdegradsvinkelen λ . Bredde- og lengdegradsretningene kalles også meridional og sonal retning. (Figur fra https://commons.wikimedia.org/wiki/File:Sphere_wireframe.svg).

A.4 Funksjon

Funksjoner er sammenhenger (formler eller lovmessige uttrykk) som gir verdier for ethvert punkt (x, y, z) eller (λ, φ, r) .

A.5 Skalarfunksjon

Skalarfunksjonen $\phi = \phi(x, y, z)$ (eller $\phi(\lambda, \varphi, r)$) er en én-komponent størrelse (ett tall). En skalarfunksjon påvirkes ikke av om koordinatsystemet roterer. Eksempler på skalarfunksjoner er temperatur, trykk, skydekke og saltholdighet.

A.6 Vektorfunksjon

Vektorfunksjonen $\mathbf{u} = \mathbf{u}(x, y, z)$ (eller $\mathbf{u} = \mathbf{u}(\lambda, \varphi, r)$) er en flerkomponent størrelse med lengde (verdi eller absoluttverdi) og retning. Vektorfunksjonen endrer ikke verdi men vektorfunksjonens komponenter endrer seg i et roterende koordinatsystem. Eksempler på vektorfunksjoner er vind i atmosfæren og strøm i havet.

Lengden (verdien) av vektorfunksjonen \mathbf{u} betegnes $|\mathbf{u}|$. For $\mathbf{u} = (u_x, u_y, u_z)$ følger det at

$$|\mathbf{u}| = \sqrt{u_x^2 + u_y^2 + u_z^2} \quad (542)$$

eller alternativt

$$\mathbf{u}^2 = u_x^2 + u_y^2 + u_z^2 \quad (543)$$

A.7 Skalarprodukt

Skalarproduktet av to vektorer \mathbf{a} og \mathbf{b} , $\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}$, er en skalar definert som

$$\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} \equiv |\mathbf{a}||\mathbf{b}| \cos \theta \quad (544)$$

For $\mathbf{a} = (a_x, a_y, a_z)$ og $\mathbf{b} = (b_x, b_y, b_z)$, følger det at

$$\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = a_x b_x + a_y b_y + a_z b_z \quad (545)$$

Vis (545) i to dimensjoner x og y . Hint: Tegn vektorene \mathbf{a} og \mathbf{b} i et koordinatsystem, la θ_a og θ_b være vinklene mellom de to vektorene og x -aksen og bruk at $\cos(\theta_a \pm \theta_b) = \cos \theta_a \cos \theta_b \mp \sin \theta_a \sin \theta_b$.

Videre er

$$\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = 0 \text{ for } \mathbf{a} \perp \mathbf{b} \quad (546)$$

Fysisk anvende av skalarproduktet er ofte knyttet til å projisere vektoren \mathbf{a} på \mathbf{b} , for eksempel for å bestemme komponenten av kraften \mathbf{a} i retning av \mathbf{b} .

Skalaridentiteter

$$\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = \mathbf{b} \cdot \mathbf{a} \quad (547)$$

$$\mathbf{a} \cdot (\mathbf{b} + \mathbf{c}) = \mathbf{a} \cdot \mathbf{b} + \mathbf{a} \cdot \mathbf{c} \quad (548)$$

Vis (547) og (548). Hint: Skriv uttrykkene på komponentform.

A.8 Kryssprodukt

Kryssproduktet av to vektorer \mathbf{a} og \mathbf{b} , $\mathbf{a} \times \mathbf{b}$, er en vektor definert som

$$\mathbf{a} \times \mathbf{b} = \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \end{vmatrix} = \hat{\mathbf{x}}(a_y b_z - a_z b_y) - \hat{\mathbf{y}}(a_x b_z - a_z b_x) + \hat{\mathbf{z}}(a_x b_y - a_y b_x) \quad (549)$$

$\mathbf{a} \times \mathbf{b}$ er normal på \mathbf{a} og \mathbf{b} , og orienteringen er gitt ved høyrehåndsregelen.

(549) Vis at $\mathbf{a} \times \mathbf{b}$ er normal på \mathbf{a} og \mathbf{b} , og at orienteringen er gitt ved høyrehåndsregelen.

Lengden av $\mathbf{a} \times \mathbf{b}$ er gitt ved uttrykket

$$|\mathbf{a} \times \mathbf{b}| = |\mathbf{a}||\mathbf{b}| \sin \theta \quad (550)$$

der θ er vinkelen mellom \mathbf{a} og \mathbf{b} . Det følger av uttrykket over at $|\mathbf{a} \times \mathbf{b}|$ er lik arealet til parallelogrammet spent ut av \mathbf{a} og \mathbf{b} .

Vis at (550) er arealet av et parallelogram.

Kryssproduktidentiteter

$$\mathbf{a} \times \mathbf{b} = -\mathbf{b} \times \mathbf{a} \quad (551)$$

$$\mathbf{a} \times (\mathbf{b} + \mathbf{c}) = \mathbf{a} \times \mathbf{b} + \mathbf{a} \times \mathbf{c} \quad (552)$$

$$\mathbf{a} \times (\mathbf{b} \times \mathbf{c}) \neq (\mathbf{a} \times \mathbf{b}) \times \mathbf{c} \quad (553)$$

Vis (551), (552) og (553). Hint: Skriv uttrykkene på komponentform.

A.9 Derivasjon i et fikssystem

Et fikskoordinatsystem, eller fikssystem i kortform, er et koordinatsystem som ikke roterer, dvs. et korrdinatsystem som ligger fast i forhold til fiksstjernene, derav navnet. I et slikt system ligger koordinatsystemets akser, og med det koordinatsystemets enhetsvektorer, fast. Det er derfor ikke bidrag fra enhetsvektorene når en vektorstørrelse deriveres i et fikssystem.

A.9.1 Gradient til en skalarfunksjon

Gradienten til en skalarfunksjon ϕ , $\nabla\phi$, er en vektor. ∇ kalles *grad*, *del* eller *nabla*.

$$\nabla \equiv \hat{\mathbf{x}} \frac{\partial}{\partial x} + \hat{\mathbf{y}} \frac{\partial}{\partial y} + \hat{\mathbf{z}} \frac{\partial}{\partial z} \quad (554)$$

Det følger da at

$$\nabla\phi = \hat{\mathbf{x}} \frac{\partial\phi}{\partial x} + \hat{\mathbf{y}} \frac{\partial\phi}{\partial y} + \hat{\mathbf{z}} \frac{\partial\phi}{\partial z} \quad (555)$$

$\nabla\phi$ er *alltid* rettet fra lav til høy verdi av ϕ . $\nabla\phi$ er også *alltid* rettet normalt på isoverdiene til ϕ . Er vi ute i terrenget og ϕ er høydekoter, vil $\nabla\phi$ derfor være rettet brattest oppover i terrenget. På tilsvarende måte vil ∇p , hvor p er lufttrykk, alltid være rettet fra lavt til høyt trykk (og stå normalt på isobarene).

A.9.2 Divergensoperatoren; divergerende og konvergerende vektorfunksjon

Divergensen til en vektorfunksjon \mathbf{a} , $\nabla \cdot \mathbf{a}$, er en skalar (ett tall).

$\nabla \cdot$ kalles *div* eller *divergens*. Fra definisjonen av et prikkprodukt, se (545), følger det at

$$\nabla \cdot \mathbf{a} = \frac{\partial a_x}{\partial x} + \frac{\partial a_y}{\partial y} + \frac{\partial a_z}{\partial z} \quad (556)$$

Fysisk tolkning av $\nabla \cdot \mathbf{a}$ er knyttet til en kilde eller et sluk til vektorfunksjonen \mathbf{a} innenfor et avgrenset volum.

Fra konserveringsligningen følger det at \mathbf{a} øker innenfor volumet dersom $\nabla \cdot \mathbf{a} < 0$. Vi sier da at vektorfeltet *konvergerer*. Tilsvarende avtar \mathbf{a} dersom $\nabla \cdot \mathbf{a} > 0$. Vi ser da at vektorfeltet *divergerer*. For tilfellet $\nabla \cdot \mathbf{a} = 0$, forblir \mathbf{a} uforandret innenfor volumet.

A.9.3 Dobbeltderivert

Divergensen til gradienten av skalarfunksjonen ϕ , $\nabla \cdot (\nabla\phi)$, er en skalarfunksjon og representerer den dobbeltderiverte av ϕ . ∇^2 kalles *del-i-andre*.

$$\nabla \cdot (\nabla\phi) = \nabla^2\phi = \frac{\partial^2\phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2\phi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2\phi}{\partial z^2} \quad (557)$$

A.9.4 Kurl

Kurlen til en vektorfunksjon \mathbf{a} , $\nabla \times \mathbf{a}$, er en vektor. $\nabla \times$ kalles *kurl*. $\nabla \times \mathbf{a}$ står alltid normalt på ∇ og \mathbf{a} , og retningen er gitt ved høyrehåndsregelen.

$$\nabla \times \mathbf{a} = \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ a_x & a_y & a_z \end{vmatrix} = \hat{\mathbf{x}} \left(\frac{\partial a_z}{\partial y} - \frac{\partial a_y}{\partial z} \right) - \hat{\mathbf{y}} \left(\frac{\partial a_z}{\partial x} - \frac{\partial a_x}{\partial z} \right) + \hat{\mathbf{z}} \left(\frac{\partial a_y}{\partial x} - \frac{\partial a_x}{\partial y} \right) \quad (558)$$

A.9.5 Relativ, absolutt og potensiell virvling

Kurlen til hastighetsvektoren \mathbf{u} kan skrives som

$$\nabla \times \mathbf{u} = \hat{\mathbf{x}} \left(\frac{\partial w}{\partial y} - \frac{\partial v}{\partial z} \right) - \hat{\mathbf{y}} \left(\frac{\partial w}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial z} \right) + \hat{\mathbf{z}} \left(\frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y} \right) \quad (559)$$

Vertikalkomponenten til $\nabla \times \mathbf{u}$ kalles *relativ virvling* og betegnes med symbolet ζ

$$\zeta = \frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y} \quad (560)$$

$\zeta > 0$ betyr rotasjon *mot* klokken (syklinisk bevegelse) når en observerer rotasjonen overfra på nordlige halvkule. For $\zeta < 0$, er rotasjonen *med* klokken (anti-syklisk bevegelse)

Absolutt virvling er gitt ved summen

$$\zeta + f \quad (561)$$

hvor f er Coriolisparameteren $2\Omega \sin \varphi$.

Potensiell virvling er som absolutt virvling, men inkluderer væskens høde h

$$\frac{\zeta + f}{h} \quad (562)$$

A.10 Vektoridentiteter som involverer ∇ -operatoren

$$\nabla \cdot (\nabla \times \mathbf{a}) = 0 \quad (563)$$

$$\nabla \times (\nabla \phi) = 0 \quad (564)$$

$$\nabla \cdot (\phi \mathbf{a}) = \phi \nabla \cdot \mathbf{a} + \mathbf{a} \cdot \nabla \phi \quad (565)$$

$$\nabla \times (\phi \mathbf{a}) = \phi \nabla \times \mathbf{a} + \nabla \phi \times \mathbf{a} \quad (566)$$

$$\nabla \cdot (\mathbf{a} \times \mathbf{b}) = \mathbf{b} \cdot (\nabla \times \mathbf{a}) - \mathbf{a} \cdot (\nabla \times \mathbf{b}) \quad (567)$$

$$\nabla \times (\mathbf{a} \times \mathbf{b}) = \mathbf{a} (\nabla \cdot \mathbf{b}) - \mathbf{b} (\nabla \cdot \mathbf{a}) + (\mathbf{b} \cdot \nabla) \mathbf{a} - (\mathbf{a} \cdot \nabla) \mathbf{b} \quad (568)$$

$$\nabla (\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}) = (\mathbf{a} \cdot \nabla) \mathbf{b} + (\mathbf{b} \cdot \nabla) \mathbf{a} + \mathbf{a} \times (\nabla \times \mathbf{b}) + \mathbf{b} \times (\nabla \times \mathbf{a}) \quad (569)$$

$$\nabla \times (\nabla \times \mathbf{a}) = \nabla (\nabla \cdot \mathbf{a}) - \nabla^2 \mathbf{a} \quad (570)$$

Fra (569), følger det at

$$(\mathbf{a} \cdot \nabla) \mathbf{a} = \nabla \left(\frac{1}{2} \mathbf{a} \cdot \mathbf{a} \right) - \mathbf{a} \times (\nabla \times \mathbf{a}) \quad (571)$$

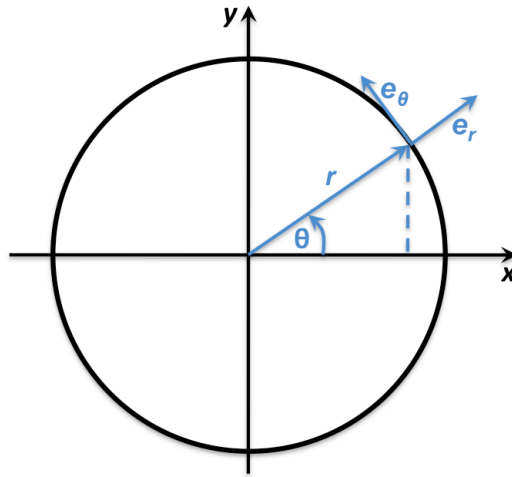
Vis (563)-(571). Hint: Skriv uttrykkene på komponentform.

A.11 Derivasjon i et polarkoordinatsystem

A.11.1 Polare koordinater

Gradient-operatoren i polare koordinater (r, θ) er gitt ved den inverse av skalafaktorene (537)

$$\nabla = \left(\frac{\partial}{\partial r}, \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \theta} \right) \quad (572)$$



Figur 80: Kurvelineære polare koordinater i to dimensjoner med tilhørende ortogonale enhetsvektorer \mathbf{e}_r og \mathbf{e}_θ .

Fra figur 80, følger det at enhetsvektorene \mathbf{e}_r og \mathbf{e}_θ kan skrives som

$$\mathbf{e}_r = \hat{\mathbf{x}} \cos \theta + \hat{\mathbf{y}} \sin \theta \quad (573)$$

$$\mathbf{e}_\theta = -\hat{\mathbf{x}} \sin \theta + \hat{\mathbf{y}} \cos \theta \quad (574)$$

hvor $\hat{\mathbf{x}}$ og $\hat{\mathbf{y}}$ er enhetsvektorene i det faste (x, y) koordinatsystemet. Fra (573) og (574) følger det at

$$\frac{\partial \mathbf{e}_r}{\partial \theta} = \mathbf{e}_\theta \quad \frac{\partial \mathbf{e}_r}{\partial r} = \mathbf{0} \quad (575)$$

$$\frac{\partial \mathbf{e}_\theta}{\partial \theta} = -\mathbf{e}_r \quad \frac{\partial \mathbf{e}_\theta}{\partial r} = \mathbf{0} \quad (576)$$

Divergensen til hastighetsvektoren $\mathbf{u} = \mathbf{e}_r u_r + \mathbf{e}_\theta u_\theta$, sett fra det faste koordinatsystemet (x, y) , blir da

$$\begin{aligned} \nabla \cdot \mathbf{u} &= \left(\mathbf{e}_r \frac{\partial}{\partial r} + \mathbf{e}_\theta \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \theta} \right) \cdot (\mathbf{e}_r u_r + \mathbf{e}_\theta u_\theta) \\ &= \mathbf{e}_r \cdot \frac{\partial}{\partial r} (\mathbf{e}_r u_r + \mathbf{e}_\theta u_\theta) + \frac{1}{r} \mathbf{e}_\theta \cdot \frac{\partial}{\partial \theta} (\mathbf{e}_r u_r + \mathbf{e}_\theta u_\theta) \\ &= \mathbf{e}_r \cdot \left(\frac{\partial \mathbf{e}_r}{\partial r} u_r + \mathbf{e}_r \frac{\partial u_r}{\partial r} + \frac{\partial \mathbf{e}_\theta}{\partial r} u_\theta + \mathbf{e}_\theta \frac{\partial u_\theta}{\partial r} \right) \\ &\quad + \frac{1}{r} \mathbf{e}_\theta \cdot \left(\frac{\partial \mathbf{e}_r}{\partial \theta} u_r + \mathbf{e}_r \frac{\partial u_r}{\partial \theta} + \frac{\partial \mathbf{e}_\theta}{\partial \theta} u_\theta + \mathbf{e}_\theta \frac{\partial u_\theta}{\partial \theta} \right) \\ &= \frac{\partial u_r}{\partial r} + \frac{u_r}{r} + \frac{1}{r} \frac{\partial u_\theta}{\partial \theta} \end{aligned} \quad (577)$$

Her har vi benyttet at $\mathbf{e}_r \cdot \mathbf{e}_r = \mathbf{e}_\theta \cdot \mathbf{e}_\theta = 1$, $\mathbf{e}_r \cdot \mathbf{e}_\theta = 0$ og uttrykkene (575) og (576). Skråpilene viser leddene som ikke gir bidrag.

Ved å kombinere de to første leddene i uttrykket over, får vi

$$\nabla \cdot \mathbf{u} = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (ru_r) + \frac{1}{r} \frac{\partial u_\theta}{\partial \theta} \quad (578)$$

På tilsvarende måte finner vi at

$$\nabla^2 \phi = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial \phi}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 \phi}{\partial \theta^2} \quad (579)$$

Vis (579).

A.11.2 Polare kulekoordinater

Gradient-operatoren i polare kulekoordinater (λ, φ, r) er gitt ved den inverse av skalafaktorene (541)

$$\nabla = \left(\frac{1}{r \cos \varphi} \frac{\partial}{\partial \lambda}, \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \varphi}, \frac{\partial}{\partial r} \right) \quad (580)$$

Divergensen til hastighetsvektoren $\mathbf{u} = \mathbf{e}_\lambda u + \mathbf{e}_\varphi v + \mathbf{e}_r w$, blir da

$$\nabla \cdot \mathbf{u} = \frac{1}{r \cos \varphi} \frac{\partial u}{\partial \lambda} + \frac{1}{r \cos \varphi} \frac{\partial v \cos \varphi}{\partial \varphi} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial wr^2}{\partial r} \quad (581)$$

Videre er

$$\nabla^2 \phi = \frac{1}{r^2 \cos^2 \varphi} \frac{\partial^2 \phi}{\partial \lambda^2} + \frac{1}{r^2 \cos \varphi} \frac{\partial}{\partial \varphi} \left(\cos \varphi \frac{\partial \phi}{\partial \varphi} \right) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \frac{\partial \phi}{\partial r} \right) \quad (582)$$

I tilfellet med konstant r , kan det siste leddet i (581) og (582) forenkles siden r^2 -faktorene kansellerer hverandre.

Uttrykkene over kan utledes på følgende måte: Enhetsvektorene \mathbf{e}_λ , \mathbf{e}_φ og \mathbf{e}_r , uttrykt i kartesiske (x, y, z) koordinater, er

$$\mathbf{e}_\lambda = (-\sin \lambda, \cos \lambda, 0) \quad (583)$$

$$\mathbf{e}_\varphi = (-\cos \lambda \sin \varphi, -\sin \lambda \sin \varphi, \cos \varphi) \quad (584)$$

$$\mathbf{e}_r = (\cos \lambda \cos \varphi, \sin \lambda \cos \varphi, \sin \varphi) \quad (585)$$

Polare kulekoordinater (λ, φ, r) , hvor λ spenner ut øst-vest retningen (sonal retning), φ spenner ut nord-sør retningen (meridional retning) og r er radial koordinat, er vist til høyre i figur 77.

Skalafaktorene for henholdsvis λ -, φ - og r -retningen, er

$$r \cos \varphi, \quad r, \quad 1 \quad (586)$$

Gradient-operatoren er gitt ved den inverse av skalafaktorene, altså

$$\nabla = \left(\frac{1}{r \cos \varphi} \frac{\partial}{\partial \lambda}, \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \varphi}, \frac{\partial}{\partial r} \right) \quad (587)$$

Alternativt kan (587) uttrykkes med hjelp av enhetsvektorene \mathbf{e}_λ , \mathbf{e}_φ og \mathbf{e}_r i henholdsvis λ -, φ - og r -retningen. Dette gir

$$\nabla = \frac{\mathbf{e}_\lambda}{r \cos \varphi} \frac{\partial}{\partial \lambda} + \frac{\mathbf{e}_\varphi}{r} \frac{\partial}{\partial \varphi} + \mathbf{e}_r \frac{\partial}{\partial r} \quad (588)$$

Enhetsvektorene \mathbf{e}_λ , \mathbf{e}_φ og \mathbf{e}_r har følgende komponenter i x , y , z koordinatsystemet

$$\mathbf{e}_\lambda = (-\sin \lambda, \cos \lambda, 0) \quad (589)$$

$$\mathbf{e}_\varphi = (-\cos \lambda \sin \varphi, -\sin \lambda \sin \varphi, \cos \varphi) \quad (590)$$

$$\mathbf{e}_r = (\cos \lambda \cos \varphi, \sin \lambda \cos \varphi, \sin \varphi) \quad (591)$$

Enhetsvektorene \mathbf{e}_λ , \mathbf{e}_φ og \mathbf{e}_r er ortogonale vektorer. Det følger derfor at

$$\mathbf{e}_n \cdot \mathbf{e}_m = \begin{cases} 1 & \text{dersom } n = m \\ 0 & \text{dersom } n \neq m \end{cases} \quad (592)$$

der n og m er alle mulige permutasjoner av λ , φ og r .

I motsetning til enhetsvektorene i et kartesisk koordinatsystem som ligger fast, varierer enhetsvektorene \mathbf{e}_λ , \mathbf{e}_φ og \mathbf{e}_r i rommet, i dette tilfellet med λ og φ , se (589)–(591). Det følger fra (589)–(591) at

$$\frac{\partial}{\partial r} \mathbf{e}_\lambda = \frac{\partial}{\partial r} \mathbf{e}_\varphi = \frac{\partial}{\partial r} \mathbf{e}_r = \mathbf{0} \quad (593)$$

Videre er variasjonen av enhetsvektorene i φ -retningen

$$\frac{\partial}{\partial \varphi} \mathbf{e}_\lambda = \mathbf{0} \quad (594)$$

$$\frac{\partial}{\partial \varphi} \mathbf{e}_\varphi = (-\cos \lambda \cos \varphi, -\sin \lambda \cos \varphi, -\sin \varphi) = -\mathbf{e}_r \quad (595)$$

$$\frac{\partial}{\partial \varphi} \mathbf{e}_r = (-\cos \lambda \sin \varphi, -\sin \lambda \sin \varphi, \cos \varphi) = \mathbf{e}_\varphi \quad (596)$$

og, på tilsvarende måte, er variasjonen i λ -retningen

$$\frac{\partial}{\partial \lambda} \mathbf{e}_\lambda = (-\cos \lambda, -\sin \lambda, 0) = \sin \varphi \mathbf{e}_\varphi - \cos \varphi \mathbf{e}_r \quad (597)$$

$$\frac{\partial}{\partial \lambda} \mathbf{e}_\varphi = (\sin \lambda \sin \varphi, -\cos \lambda \sin \varphi, 0) = -\sin \varphi \mathbf{e}_\lambda \quad (598)$$

$$\frac{\partial}{\partial \lambda} \mathbf{e}_r = (-\sin \lambda \cos \varphi, \cos \lambda \cos \varphi, 0) = \cos \varphi \mathbf{e}_\lambda \quad (599)$$

Divergensen til hastighetsvektoren $\mathbf{u} = \mathbf{e}_\lambda u + \mathbf{e}_\varphi v + \mathbf{e}_r w$, blir da

$$\nabla \cdot \mathbf{u} = \left(\frac{1}{r \cos \varphi} \frac{\partial}{\partial \lambda}, \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \varphi}, \frac{\partial}{\partial r} \right) \cdot (u, v, w) = \mathcal{D}_1 + \mathcal{D}_2 + \mathcal{D}_3 \quad (600)$$

Her er, for oversiktens skyld, divergensen delt i tre bidrag: \mathcal{D}_1 , \mathcal{D}_2 og \mathcal{D}_3 . Vi har da

$$\mathcal{D}_1 = \frac{\mathbf{e}_\lambda}{r \cos \varphi} \frac{\partial}{\partial \lambda} \cdot (\mathbf{e}_\lambda u + \mathbf{e}_\varphi v + \mathbf{e}_r w) \quad (601)$$

$$= \frac{\mathbf{e}_\lambda}{r \cos \varphi} \cdot \left(\cancel{\frac{\partial \mathbf{e}_\lambda}{\partial \lambda}} u + \mathbf{e}_\lambda \frac{\partial u}{\partial \lambda} + \frac{\partial \mathbf{e}_\varphi}{\partial \lambda} v + \cancel{\mathbf{e}_\varphi \frac{\partial v}{\partial \lambda}} + \frac{\partial \mathbf{e}_r}{\partial \lambda} w + \cancel{\mathbf{e}_r \frac{\partial w}{\partial \lambda}} \right) \quad (602)$$

$$= \frac{\mathbf{e}_\lambda}{r \cos \varphi} \cdot \left(\mathbf{e}_\lambda \frac{\partial u}{\partial \lambda} - \mathbf{e}_\lambda \sin \varphi v + \mathbf{e}_\lambda \cos \varphi w \right) \quad (603)$$

$$= \frac{1}{r \cos \varphi} \frac{\partial u}{\partial \lambda} - \frac{v \sin \varphi}{r \cos \varphi} + \frac{w}{r} \quad (604)$$

hvor skråpilene viser ledd som ikke gir bidrag.

Videre er

$$\mathcal{D}_2 = \frac{\mathbf{e}_\varphi}{r} \frac{\partial}{\partial \varphi} \cdot (\mathbf{e}_\lambda u + \mathbf{e}_\varphi v + \mathbf{e}_r w) \quad (605)$$

$$= \frac{\mathbf{e}_\varphi}{r} \cdot \left(\cancel{\frac{\partial \mathbf{e}_\lambda}{\partial \varphi}} u + \mathbf{e}_\lambda \frac{\partial u}{\partial \varphi} + \cancel{\frac{\partial \mathbf{e}_\varphi}{\partial \varphi}} v + \mathbf{e}_\varphi \frac{\partial v}{\partial \varphi} + \frac{\partial \mathbf{e}_r}{\partial \varphi} w + \cancel{\mathbf{e}_r \frac{\partial w}{\partial \varphi}} \right) \quad (606)$$

$$= \frac{1}{r} \frac{\partial v}{\partial \varphi} + \frac{w}{r} \quad (607)$$

og, til slutt,

$$\mathcal{D}_3 = \mathbf{e}_r \frac{\partial}{\partial r} \cdot (\mathbf{e}_\lambda u + \mathbf{e}_\varphi v + \mathbf{e}_r w) \quad (608)$$

$$= \mathbf{e}_r \cdot \left(\cancel{\frac{\partial \mathbf{e}_\lambda}{\partial r}} u + \cancel{\mathbf{e}_\lambda \frac{\partial u}{\partial r}} + \cancel{\frac{\partial \mathbf{e}_\varphi}{\partial r}} v + \cancel{\mathbf{e}_\varphi \frac{\partial v}{\partial r}} + \cancel{\frac{\partial \mathbf{e}_r}{\partial r}} w + \mathbf{e}_r \frac{\partial w}{\partial r} \right) \quad (609)$$

$$= \frac{\partial w}{\partial r} \quad (610)$$

Siden $\nabla \cdot \mathbf{u} = \mathcal{D}_1 + \mathcal{D}_2 + \mathcal{D}_3$, følger det at

$$\nabla \cdot \mathbf{u} = \frac{1}{r \cos \varphi} \frac{\partial u}{\partial \lambda} - \frac{v \sin \varphi}{r \cos \varphi} + \frac{1}{r} \frac{\partial v}{\partial \varphi} + \frac{2w}{r} + \frac{\partial w}{\partial r} \quad (611)$$

På høyre side i uttrykket over kan ledd to og tre, og ledd fire og fem, slås sammen. Vi får da

$$\nabla \cdot \mathbf{u} = \frac{1}{r \cos \varphi} \frac{\partial u}{\partial \lambda} + \frac{1}{r \cos \varphi} \frac{\partial v \cos \varphi}{\partial \varphi} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial w r^2}{\partial r} \quad (612)$$

A.11.3 Totalderivert uttrykt i kulekoordinater

Den totalderiverte i kartesiske koordinater har formen

$$\frac{D\mathbf{u}}{Dt} = \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + \mathbf{u} \cdot \nabla \mathbf{u} \quad (613)$$

Den romlige derivasjonen i (613) får noen tilleggsledd i kulekoordinater. Disse kan utledes som følger.

Ser vi bort fra radielle variasjoner (slik at $\partial/\partial r = 0$), følger det fra (580) at gradientoperatoren kan skrives som

$$\nabla = \mathbf{e}_\lambda \frac{1}{a \cos \varphi} \frac{\partial}{\partial \lambda} + \mathbf{e}_\varphi \frac{1}{a} \frac{\partial}{\partial \varphi} \quad (614)$$

I uttrykket over er $a = \text{konst}$ jordens radius. Hastighetsvektoren er

$$\mathbf{u} = \mathbf{e}_\lambda u + \mathbf{e}_\varphi v + w \mathbf{e}_z \quad (615)$$

Prikkproduktet $\mathbf{u} \cdot \nabla$ kan skrives som

$$\begin{aligned} \mathbf{u} \cdot \nabla &= (\mathbf{e}_\lambda u + \mathbf{e}_\varphi v + \mathbf{e}_z w) \cdot \left(\mathbf{e}_\lambda \frac{1}{r \cos \varphi} \frac{\partial}{\partial \lambda} + \mathbf{e}_\varphi \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \varphi} \right) \\ &= \frac{u}{a \cos \varphi} \frac{\partial}{\partial \lambda} + \frac{v}{a} \frac{\partial}{\partial \varphi} + w \frac{\partial}{\partial r} \end{aligned} \quad (616)$$

hvor vi har brukt at enhetsvektorene er ortogonale.

Adveksjonsleddet i kulekoordinater blir da

$$\mathbf{u} \cdot \nabla \mathbf{u} = \left(\frac{u}{a \cos \varphi} \frac{\partial}{\partial \lambda} + \frac{v}{a} \frac{\partial}{\partial \varphi} \right) (\mathbf{e}_\lambda u + \mathbf{e}_\varphi v + \mathbf{e}_z w) \quad (617)$$

Siden enhetsvektorene endrer retning, må både hastighetskomponentene (u, v, w) og enhetsvektorene \mathbf{e}_λ , \mathbf{e}_φ og \mathbf{e}_z deriveres. Til sistnevnte benyttes (583)–(599). Det følger da at

$$\begin{aligned} &\frac{u}{a \cos \varphi} \frac{\partial}{\partial \lambda} (\mathbf{e}_\lambda u + \mathbf{e}_\varphi v + \mathbf{e}_z w) \\ &= \frac{u}{a \cos \varphi} \left(\frac{\partial u}{\partial \lambda} \mathbf{e}_\lambda + u(\sin \varphi \mathbf{e}_\varphi - \cos \varphi \mathbf{e}_z) \right. \\ &\quad \left. + \frac{\partial v}{\partial \lambda} \mathbf{e}_\varphi - v \sin \varphi \mathbf{e}_\lambda \right. \\ &\quad \left. + \frac{\partial w}{\partial \lambda} \mathbf{e}_z + w \cos \varphi \mathbf{e}_\lambda \right) \end{aligned} \quad (618)$$

og

$$\frac{v}{a} \left(\frac{\partial u}{\partial \varphi} \mathbf{e}_\lambda + \frac{\partial v}{\partial \varphi} \mathbf{e}_\varphi - v \mathbf{e}_z + w \mathbf{e}_\varphi \right) \quad (619)$$

Bidragene i \mathbf{e}_λ retningen blir

$$\frac{u}{a \cos \varphi} \frac{\partial u}{\partial \lambda} + \frac{v}{a} \frac{\partial u}{\partial \varphi} - \frac{uv}{a} \tan \varphi + \frac{uw}{a} \quad (620)$$

På tilsvarende måte blir bidragene i \mathbf{e}_φ retningen

$$\frac{u}{a \cos \varphi} \frac{\partial v}{\partial \lambda} + \frac{v}{a} \frac{\partial v}{\partial \varphi} + \frac{u^2}{a} \tan \varphi + \frac{vw}{a} \quad (621)$$

og i \mathbf{e}_z retningen

$$\frac{u}{a \cos \varphi} \frac{\partial w}{\partial \lambda} + \frac{v}{a} \frac{\partial w}{\partial \varphi} - \frac{u^2 + v^2}{a} \quad (622)$$

Fra kulekoordinatenes skalafaktorer (541) følger det at

$$\delta x = a \cos \varphi \delta \lambda \quad \text{og} \quad \delta y = a \delta \varphi \quad (623)$$

Uttrykk (617), innsatt (620)–(622), gir

$$\begin{aligned} \mathbf{u} \cdot \nabla u &= u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} - \frac{uv}{a} \tan \varphi + \frac{uw}{a} \\ \mathbf{u} \cdot \nabla v &= u \frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{u^2}{a} \tan \varphi + \frac{vw}{a} \\ \mathbf{u} \cdot \nabla w &= u \frac{\partial w}{\partial x} + v \frac{\partial w}{\partial y} - \frac{u^2 + v^2}{a} \end{aligned} \quad (624)$$

eller

$$\begin{aligned} \frac{Du}{Dt} &= \frac{\partial u}{\partial t} + \mathbf{u} \cdot \nabla u - \frac{uv}{a} \tan \varphi + \frac{uw}{a} \\ \frac{Dv}{Dt} &= \frac{\partial v}{\partial t} + \mathbf{u} \cdot \nabla v + \frac{u^2}{a} \tan \varphi + \frac{vw}{a} \\ \frac{Dw}{Dt} &= \frac{\partial w}{\partial t} + \mathbf{u} \cdot \nabla w - \frac{u^2 + v^2}{a} \end{aligned} \quad (625)$$

A.12 Adveksjonsleddet for ren sirkulær bevegelse i to dimensjoner

For ren sirkulær bevegelse, følger det fra figur 80 at

$$\mathbf{u} = u_\theta \mathbf{e}_\theta \quad (626)$$

I dette tilfellet kan adveksjonsleddet skrives som

$$\begin{aligned} \mathbf{u} \cdot \nabla \mathbf{u} &= u_\theta \mathbf{e}_\theta \cdot \left(\frac{\partial}{\partial r} \mathbf{e}_r + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \theta} \mathbf{e}_\theta \right) u_\theta \mathbf{e}_\theta \\ &= \frac{u_\theta}{r} \frac{\partial}{\partial \theta} (u_\theta \mathbf{e}_\theta) \\ &= \frac{u_\theta}{r} \left(\frac{\partial u_\theta}{\partial \theta} \mathbf{e}_\theta + u_\theta \frac{\partial \mathbf{e}_\theta}{\partial \theta} \right) \\ &= \frac{u_\theta}{r} \left(\frac{\partial u_\theta}{\partial \theta} \mathbf{e}_\theta - u_\theta \mathbf{e}_r \right) \end{aligned} \quad (627)$$

I tilfellet med konstant rotasjonshastighet, følger det at

$$\mathbf{u} \cdot \nabla \mathbf{u} = -\frac{u_\theta^2}{r} \mathbf{e}_r \quad (628)$$

I dette tilfellet er bidraget til adveksjonsleddet $\mathbf{u} \cdot \nabla \mathbf{u}$ i retning til \mathbf{u}

$$\mathbf{u} \cdot (\mathbf{u} \cdot \nabla \mathbf{u}) = 0 \quad (629)$$

Adveksjonsleddet $\mathbf{u} \cdot \nabla \mathbf{u}$ gir følgelig ikke bidrag til momentumligningen for en antatt *konstant, sirkulær bevegelse*, som for idealiserte treghetssvingninger. Følgelig kan treghetssvingninger tilnærmes fra følgende (forenklete) variant av momentumligningen (se uttrykk (114); ser bort fra trykkgradient og friksjon, i tillegg til adveksjonsleddet):

$$\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + f \hat{\mathbf{z}} \times \mathbf{u} = 0 \quad (630)$$

A.13 Sirkulær bevegelse og avstander på en kule

A.13.1 Fart til en sirkulær bevegelse

Omkmetsen O rundt en sirkel med radius r er

$$O = 2\pi r \quad (631)$$

Vinkelfarten θ er

$$\theta = 2\pi/T \quad (632)$$

der T er tiden til en full rotasjon.

Det følger da at farten v til en partikkel som beveger seg med konstant vinkelfart θ rundt en sirkel med radius r er

$$v = \frac{\text{avstand}}{\text{tid}} = \frac{2\pi r}{2\pi/\theta} = \theta r \quad (633)$$

(633) kan uttrykkes på vektorform i polarkoordinater (se venstre del av figur 77) ved hjelp av enhetsvektoren \mathbf{e}_θ (574)

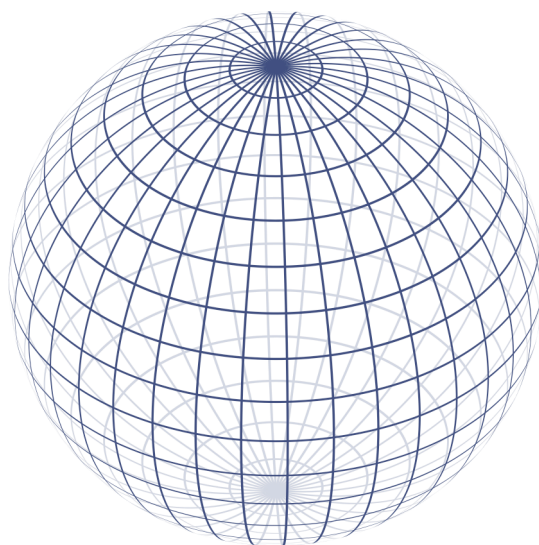
$$\mathbf{v} = v \mathbf{e}_\theta = \theta r \mathbf{e}_\theta \quad (634)$$

eller i kulekoordinater (se høyre del av figur 77)

$$\mathbf{v} = u \mathbf{e}_\lambda = \lambda r \mathbf{e}_\lambda \quad (635)$$

A.13.2 Avstander på en kule

Figur 81 illustrerer breddegradssirkler (parallele med ekvator) og lengdegradssirkler (går gjennom polpunktene) på en kule. Det følger fra figuren at den geografiske avstanden mellom to lengdegrader avtar med økende breddegrad (mot polene), mens avstanden mellom to breddegrader er konstant.



Figur 81: Bredde- og lengdegradssirkler på en kule. Breddegradssirklene er rettet i nord-sør retningen og lengdegradssirklene i øst-vest retningen. Bredde- og lengdegradsretningene kalles også meridional og sonal retning.

A.14 Taylorrekke i én og flere dimensjoner

En kontinuerlig deriverbar (glatt) funksjon $f(x)$ kan, for små δx , skrives som⁴⁰

$$f(x + \delta x) = f(x) + \frac{\partial f}{\partial x} \delta x + \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} \frac{(\delta x)^2}{2} + \dots + \frac{\partial^n f}{\partial x^n} \frac{(\delta x)^n}{n!} \quad (636)$$

Til laveste orden kan (636) skrives som

$$\delta f = \frac{\partial f}{\partial x} \delta x \quad (637)$$

hvor $\delta f = f(x + \delta x) - f(x)$. (637) brukes ofte i utledning av uttrykk hvor små endringer av δx inngår.

På tilsvarende måte kan funksjonen f av flere variable $f = f(x, y, \dots, z)$ skrives som

$$\begin{aligned} f(x + \delta x, y + \delta y, \dots, z + \delta z) &= f(x) + f(y) + \dots + f(z) \\ &+ \frac{\partial f}{\partial x} \delta x + \frac{\partial f}{\partial y} \delta y + \dots + \frac{\partial f}{\partial z} \delta z + O(\delta^2) \end{aligned} \quad (638)$$

hvor $O(\delta^2)$ betegner ledd av andre og høyere orden. Til laveste orden kan (638) skrives som

$$\delta f = \frac{\partial f}{\partial x} \delta x + \frac{\partial f}{\partial y} \delta y + \dots + \frac{\partial f}{\partial z} \delta z \quad (639)$$

hvor $\delta f = f(x + \delta x) + f(y + \delta y) + \dots + f(z + \delta z) - f(x) - f(y) - \dots - f(z)$. (639) brukes ofte i utledning av uttrykk hvor små endringer av δx , δy , ..., δz inngår.

Fra (636) følger det, for små $|\delta x|$,

$$f(x + \delta x/2) = f(x) + \frac{\partial f}{\partial x} \frac{\delta x}{2} \quad (640)$$

$$f(x - \delta x/2) = f(x) - \frac{\partial f}{\partial x} \frac{\delta x}{2} \quad (641)$$

Ved å kombinere (640) og (641), får vi (for små $|\delta x|$)

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{f(x + \delta x/2) - f(x - \delta x/2)}{\delta x} \quad (642)$$

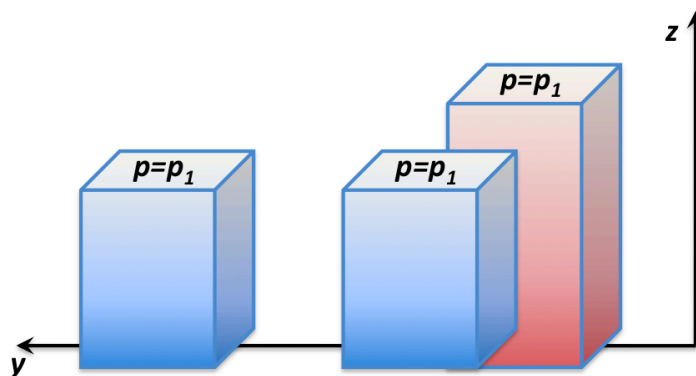
Alternativt kan (642) skrives

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{f(x) - f(x - \delta x)}{\delta x} \quad (643)$$

B Sammenheng mellom temperatur og avstand mellom to isobarflater

Figur (82) viser to identiske luftsøyler (blå farge). Trykket på oversiden av søylene er lik, $p = p_1$. Varmer vi opp søylen til høyre vil søylen bli høyere grunnet termisk ekspansjon av luften. Dersom

⁴⁰Det er vanlig å bruke symbolet d for den deriverte av en funksjon som avhenger av én variabel og ∂ for den deriverte av en funksjon som avhenger av flere variable. Fir enkelhets skyld bruker vi her symbolet ∂ i begge tilfeller.



Figur 82: Illustrasjon på termisk ekspansjon av en luftsøyle.

vi ikke har noen dynamisk respons til at søylen blir høyere, vil trykket på oversiden av den oppvarmede søylen fremdeles være $p = p_1$.

Ser vi bort fra dynamisk respons, er det kun endring av temperaturen som kan endre søylens høyde. Det siste følger ved å kombinere den hydrostatiske ligningen (??) og den idelle gasslov (5):

$$\frac{\partial p}{\partial z} = -\rho g \quad (644)$$

og

$$p = \rho RT \quad (645)$$

Setter vi tettheten ρ fra (645) inn i (644), får vi

$$\frac{\partial p}{\partial z} = -\frac{gp}{RT} \quad (646)$$

eller

$$\frac{\partial p}{p} = -\frac{g}{RT} \partial z \quad (647)$$

Integrerer vi uttrykket over fra høyden $z = z_1$ til $z = z_2$, får vi

$$\int_{p(z_1)}^{p(z_2)} \frac{\partial p}{p} = -\int_{z_1}^{z_2} \frac{g}{RT} \partial z \quad (648)$$

eller

$$\ln \frac{p(z_2)}{p(z_1)} = -\frac{g}{R\bar{T}}(z_2 - z_1) \quad (649)$$

Her betegner \bar{T} middelveien av T mellom $z = z_1$ og $z = z_2$. Uttrykket over kan alternativt skrives

$$z_2 - z_1 = \frac{R\bar{T}}{g} \ln \frac{p_1}{p_2} \quad (650)$$

Uttrykket (650) kalles den *hypsometriske ligningen*.

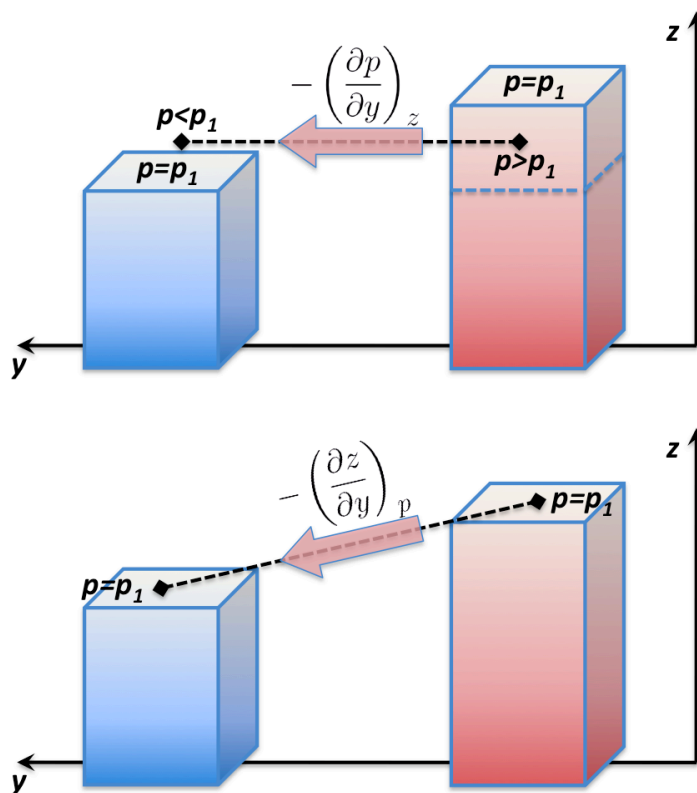
Fra (650) følger det at endringer i høyden mellom isobarflatene $p = p_1$ og $p = p_2$, gitt ved $z_2 - z_1$, kan bare oppstå grunnet endringer i temperaturen \bar{T} . Og siden $\ln(p_1/p_2) > 0$ for $p_1 > p_2$, fører økende \bar{T} til at høydeforskjellen $z_2 - z_1$ øker (og motsatt for avtangende \bar{T}).

Uttrykket (650) kan benyttes til å tallfeste effekten av termisk ekspansjon av luft. Dersom temperaturen stiger med 1 K mellom $p_1 = 1000$ hPa og $p_2 = 500$ hPa, følger det at $z_2 - z_1$, det vil si avstanden mellom $p = p_1$ og $p = p_2$, øker med 20.3 m. Vi har her brukt at $R = 287$ J kg⁻¹ K⁻¹ og $g = 9.8$ m s⁻² (samt at enhetene 1 J = 1 kg m² s⁻²). Siden verdien av R gjelder for tørr luft, gjelder utregningen over for tørr luft, som er en grei antagelse for atmosfæren generelt.

Sammenhengen i variasjon mellom middeltemperatur \bar{T} og avstanden mellom to isobarflater $z_2 - z_1$ betyr at temperaturgradientene i figurene (22)-(25) også er et bilde på hvordan avstand mellom to isobarflater endrer seg.

Merk at det er (650) som gir hvorfor isobarflatene ligger høyt i tropene (hvor det er varmt) og lavt på høye breddegrader (hvor det er kaldt).

B.1 Anvendelse av trykk- og høydegradient



Figur 83: Illustrasjon på resulterende trykk- og høydegradient basert på figur 82.

Dersom det ikke er en dynamisk respons til at søylen i figur 82 blir høyere, vil trykket på oversiden av den oppvarmede søylen fremdeles være $p = p_1$. Betrakter vi trykket p på et konstant nivå z mellom de blå og røde søylene, følger det at trykket over den blå søylen tilfredsstiller $p < p_1$, mens trykket på samme z -nivå for den røde søylen tilfredsstiller $p > p_1$ (øvre del av figur 83).

Trykkdifferansen mellom den røde og blå søylen vil sette opp en trykk-gradient som vist med den røde pila. Det vil derfor strøme varm luft mot venstre. Grunnet Coriolis-effekten vil den varme

luftadveksjonen bøyes av til høyre på den nordlige halvkule; den resulterende luftstrømmen vil altså være rettet inn i figurplanet. Dersom y er rettet nordover, er dette varmluftsadveksjon tilsvarende venstre del av figur 25. Merk at denne betraktningen er gjort for konstant høyde z , altså konsistent med det geostrofiske uttrykket (??) og termalvinduttrykket (213).

Alternativt kan vi betrakte helningen til isobaren $p = p_1$, se nederste del av figur 25. I dette tilfellet avtar z med økende y , altså er høydegradienten $-(\partial z/\partial y)_p$ rettet nedover mot venstre. Dette fører til at varm luft strømmer mot venstre, og grunnet Coriolis-effekten vil den varme vinden bøyes av til høyre på den nordlige halvkule. I motsetning til tilfellet i avsnittet over, er denne betraktningen gjort for konstant trykk p , altså konsistent med det geostrofiske uttrykket (180) og termalvinduttrykket (220).

C Utledning, potensiell energi i en tolagsmodell

Utgangspunktet for utledningen er de to integralene som beskriver potensiell energi i en tolagsmodell, se (353).

Siden ρ er konstant for hvert av de to delintervallene av z , samt at g er konstant, kan (353) skrives som

$$PE = \int_{-L}^L g\rho_1 \left(\int_0^{h(y)} z dz \right) dy + \int_{-L}^L g\rho_2 \left(\int_{h(y)}^H z dz \right) dy \quad (651)$$

z -integralene i (651) kan løses direkte

$$PE = \int_{-L}^L g\rho_1 \left(\frac{1}{2}h^2(y) \right) dy + \int_{-L}^L g\rho_2 \left(\frac{H^2}{2} - \frac{h^2(y)}{2} \right) dy \quad (652)$$

Siden

$$h(y) = \frac{H}{2} + \gamma y \quad (653)$$

følger det at

$$h^2(y) = \frac{H^2}{4} + H\gamma y + \gamma^2 y^2 \quad (654)$$

og

$$H^2 - h^2(y) = \frac{3H^2}{4} - H\gamma y - \gamma^2 y^2 \quad (655)$$

Innsatt i (652) gir dette

$$\begin{aligned} PE &= \frac{g\rho_1}{2} \int_{-L}^L \left(\frac{H^2}{4} + H\gamma y + \gamma^2 y^2 \right) dy + \frac{g\rho_2}{2} \int_{-L}^L \left(\frac{3H^2}{4} - H\gamma y - \gamma^2 y^2 \right) dy \\ &= \frac{g\rho_1}{2} \left[\frac{H^2}{4}y + \frac{H\gamma}{2}y^2 + \frac{\gamma^2}{3}y^3 \right]_{-L}^L + \frac{g\rho_2}{2} \left[\frac{3H^2}{4}y - \frac{H\gamma}{2}y^2 - \frac{\gamma^2}{3}y^3 \right]_{-L}^L \\ &= \frac{g\rho_1}{2} \left(\frac{H^2}{2}L + 0 + \frac{2\gamma^2}{3}L^3 \right) + \frac{g\rho_2}{2} \left(\frac{3H^2}{2}L - 0 - \frac{2\gamma^2}{3}L^3 \right) \\ &= g(\rho_1 - \rho_2) \frac{\gamma^2 L^3}{3} + g(\rho_1 + 3\rho_2) \frac{H^2 L}{4} \end{aligned} \quad (656)$$

Det siste leddet i siste linje i uttrykket over kan omskrives

$$g(\rho_1 + 3\rho_2) \frac{H^2 L}{4} = g\rho_1 H^2 L - \frac{3}{4}g(\rho_1 - \rho_2) H^2 L = \rho_1 \left(g - \frac{3g'}{4} \right) H^2 L \quad (657)$$

hvor

$$g' = \frac{g(\rho_1 - \rho_2)}{\rho_1} \quad (658)$$

er redusert gravitasjonen (se 249).

D Utledning, meridional forflytting av ev Taylor-søyle på en kule grunnet Ekman-pumping

Med vinklene i figur 69, følger det at

$$\cos \theta = \frac{h}{d} \quad (659)$$

Siden $\theta = \pi/2 - \varphi$, gjelder

$$\cos \theta = \cos \left(\frac{\pi}{2} - \varphi \right) = \cos \left(\frac{\pi}{2} \right) \cos \varphi + \sin \left(\frac{\pi}{2} \right) \sin \varphi = \sin \varphi \quad (660)$$

Vi får da at

$$d = \frac{h}{\sin \varphi} \quad (661)$$

Den røde søylen i figur 84 viser geometrien til Taylor-søylen i figur 69. Dersom Taylor-søylens radius er r , er søylens areal

$$A = \pi r^2 \quad (662)$$

Tenker vi oss at nederste grense for Ekman-laget skjærer gjennom Taylor-søylen, vil Ekman-laget beskrive en ellipse i sylindren med areal

$$A' = \pi r_1 r_2 \quad (663)$$

der r_1 og r_2 er ellipsens halvaksler. Fra venstre del av figur 84 følger det at $r_1 = r$, og fra høyre del av samme figur gjelder

$$\cos \left(\frac{\pi}{2} - \varphi \right) = \frac{r}{r_2} \quad (664)$$

Siden $\cos(\pi/2 - \varphi) = \sin \varphi$ (se 660), følger det at

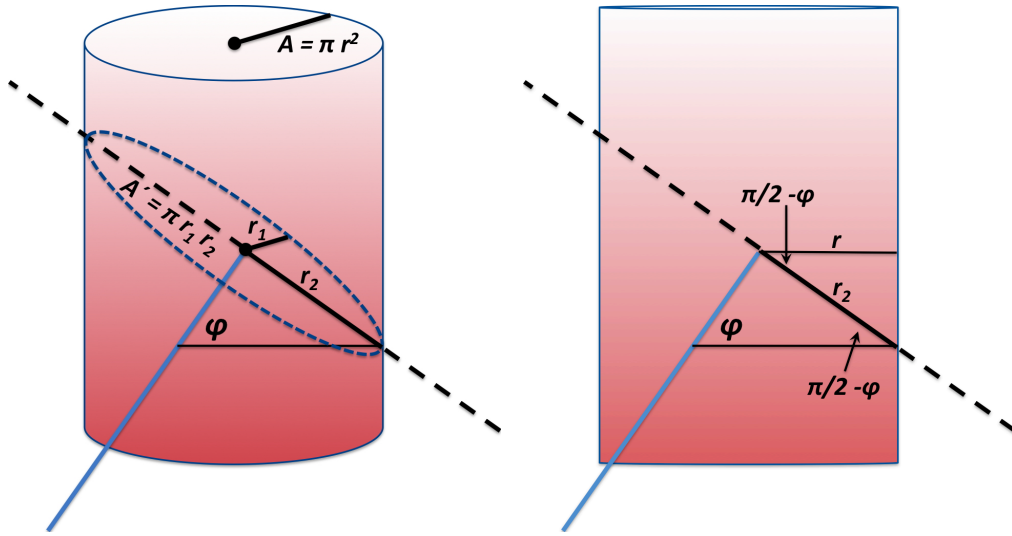
$$r_2 = \frac{r}{\sin \varphi} \quad (665)$$

Ellipsens areal A' kan da skrives som

$$A' = \pi r_1 r_2 = \pi \frac{r^2}{\sin \varphi} = \frac{A}{\sin \varphi} \quad (666)$$

Det følger nå at Ekman-pumpingen (w_{Ek}) ned i Taylor-søylen er

$$A' w_{\text{Ek}} = \frac{A}{\sin \varphi} w_{\text{Ek}} \quad (667)$$



Figur 84: Til venstre vises geometrien til den røde Taylor-søylen i figur 69. Taylor-søylen har et areal πr^2 , hvor r er søylens radius. Nedre grenseflate til Ekman-laget skjærer gjennom søylen som illustrert med den stiplede, svarte linjen. Tverrsnittet til arealet av tilhørende ellipse er $\pi r_1 r_2$, hvor r_1 og r_2 er ellipsens halvaksler (og $r_1 = r$). Til høyre vises Taylor-søylen, betraktet parallelt med ellipsen vist på figuren til venstre.

Som følge av Ekman-pumpingen, vil søylens høyde h øke. Siden $w_{\text{Ek}} < 0$ ved Ekman-pumping ned i havet, kan vi skrive

$$w_{\text{Ek}} = -\frac{Dh}{Dt} \quad (668)$$

(668) innstatt i (667) gir

$$A' w_{\text{Ek}} = \frac{A}{\sin \varphi} w_{\text{Ek}} = -\frac{A}{\sin \varphi} \frac{Dh}{Dt} = -A \frac{Dd}{Dt} \quad (669)$$

hvor (661) er brukt i siste overgang.

Fra andre og siste likhet i (669) følger det at

$$\frac{w_{\text{Ek}}}{\sin \varphi} = -\frac{Dd}{Dt} \quad (670)$$

Siden d er en funksjon av φ , $d = d(\varphi)$, gir Taylor-rekkeutvikling til laveste orden at

$$\delta d = \frac{\partial d}{\partial \varphi} \delta \varphi = \frac{dd}{d\varphi} \delta \varphi \quad (671)$$

Dividerer vi uttrykket over med δt , får vi for små δd og $\delta \varphi$ at

$$\frac{Dd}{Dt} = \frac{dd}{d\varphi} \frac{D\varphi}{Dt} \quad (672)$$

Dette gir at

$$\frac{w_{\text{Ek}}}{\sin \varphi} = -\frac{dd}{d\varphi} \frac{D\varphi}{Dt} \quad (673)$$

Bruker vi (661), får vi

$$\frac{dd}{d\varphi} = \frac{d}{d\varphi} \left(\frac{h}{\sin \varphi} \right) = -\frac{h \cos \varphi}{\sin^2 \varphi} \quad (674)$$

Dernest, basert på definisjonen av en buelengde, følger det at

$$dy = a d\varphi \quad (675)$$

hvor a er jordens radius. Den tidsderiverte av (675) gir

$$\frac{Dy}{Dt} = a \frac{D\varphi}{Dt} \quad \text{eller} \quad \frac{D\varphi}{Dt} = \frac{v}{a} \quad (676)$$

hvor vi har brukt at $Dy/Dt = v$.

(674) og (676) innsatt i (673) gir

$$w_{\text{Ek}} = \frac{v h \cos \varphi}{a \sin \varphi} \quad (677)$$

Multipliserer vi uttrykket over med $2\Omega \sin \varphi$, får vi

$$2\Omega \sin \varphi w_{\text{Ek}} = v h \frac{2\Omega}{a} \cos \varphi \quad (678)$$

Siste uttrykk kan forenkles ved hjelp av Coriolisparameteren f og df/dy siden

$$f = 2\Omega \sin \varphi \quad \text{og} \quad \frac{df}{dy} = \frac{2\Omega}{a} \cos \varphi = \beta \quad (679)$$

Innsatt i (678) gir dette

$$f w_{\text{Ek}} = v h \beta \quad (680)$$

eller

$$\beta v = f \frac{w_{\text{Ek}}}{h} \quad (681)$$

Uttrykket over, basert på Taylor-Proudman teoremet, har samme form som hastighetsbalansen basert på geostrofi, se (495). De to tilnærmingene er derfor konsistente.

E Geostrofisk strøm tolket med strømfunksjon ψ (§7.1)

Når

$$\nabla_h \cdot \mathbf{u} = 0 \quad (682)$$

eksisterer det en skalar funksjon $\psi(x, y)$ (m^2/s), kalt strømfunksjon, hvor

$$\boxed{u = -\frac{\partial \psi}{\partial y} \quad \text{og} \quad v = \frac{\partial \psi}{\partial x}} \quad (683)$$

Fra geostrofi-teorien har vi at geostrofisk strøm for en inkompressibel væske kan skrives på formen

$$\mathbf{u}_g = \frac{1}{f \rho_{\text{ref}}} \hat{\mathbf{z}} \times \nabla p \quad (684)$$

eller på komponentform

$$u_g = -\frac{1}{f\rho_{\text{ref}}}\frac{\partial p}{\partial y} = -\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{p}{f\rho_{\text{ref}}}\right) \quad (685)$$

$$v_g = \frac{1}{f\rho_{\text{ref}}}\frac{\partial p}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{p}{f\rho_{\text{ref}}}\right) \quad (686)$$

Ved å sammenligne (683) med ligningene over, ser vi at stømfunksjonen for geostrofisk strøm er

$$\psi(x, y) = \frac{1}{f\rho_{\text{ref}}}p(x, y), \quad \text{så} \quad \psi \propto p \quad (687)$$

Fra geostrofisk teori vet vi at isobarene til p gir *strømretning* langs isobarene, *strømorientering* basert på kryssproduktet i uttrykk (684) og *strømstyrke* gitt ved hvor tett isobarene ligger.

Det er nettopp disse egenskapene som stømfunksjonen har: *For ethvert divergensfritt hastighetsfelt gir stømfunksjonen strømretning, strømorientering og strømstyrke.*

Når ψ er kjent, følger *strømorienteringen* fra (683). Skulle f.eks. ψ avta i positiv x - og y -retning, vil $u > 0$ og $v < 0$. Det er tilsvarende argumentasjon som f.eks. bestemmer sirkulasjonsorienteringen til Sverdrupsirkulasjonen i figur (75).

F Oppdateringer

10. februar 2024 Fortegnsfeil, ligning (147)

15. mai 2020 Flere skrivefeil rettet

Mars-mai 2020 En rekke oppdateringer grunnet digital undervisning under korona pandemien.

20. april 2020 Utvidet diskusjon om isobar- og isentropiske flater i avsnitt 3.3

16. april 2020 Rettet trykk-verdier i avsnitt 2.10.9

11. mai 2016 Sverdrupbalansen i avsnitt 5.5.1 er noe oppdatert.

13. mai 2015 Rettet fra *vestgående* til *østgående jetstrøm* i avsnitt 3.3.12.

13. mai 2015 Termalvind og jetstrømmer er *østlig* rettet på hver halvkule (avsnitt 2.10.5 og 2.10.6).

15. januar 2013 Oppdatert kapittel 1.1.

15. februar 2012 Skrevet om avstand mellom to bredde-/lengdegradssirkler i avsnitt A.2.

2. februar 2012 Rettet uttrykk for x og y i avsnitt A.1.5.

31. januar 2012 Endret $D\mathbf{r}_r/Dt$ til $D\mathbf{r}/Dt$ i (84).

31. januar 2012 Omskrevet siste linje i avsnitt 1.5.15.

21. februar 2012 Tallverdi av f i siste linje i avsnitt ??.

21. februar 2012 Lagt inn noen regneeksempler i kap. 3.

3. april 2013 Lagt inn noen regneeksempler i kap. 4.

27. januar 2011 Noen mindre justeringer av tekst i kapittel 2: *Utledning og tolkning.*

Takk til...

Pedro Folkvord Ramirez

Manuel

Aghito

Manuel

Aghito

Kjartan

Horpestad

Silje

Skjelsvik

Olav

Håskjold

Marie

Pontoppidan

- 7. februar 2011** Lagt inn nummerering for ligning (84), og erstattet (36) med (34) over likhetstegnet i første høyreside av (84).
- 14. mars** Skrevet ut integralet i avsnitt 3.3.7.
- 15. mars** Nytt avsnitt i avsnitt 3.3.12 (starter med *Uttrykk 372 ...*).
- 31. mars** Oppdatering om kulekoordinater i appendiks, avsnitt A.11.2 og A.11.3
- 21. januar 2010** Rettet definisjon av *divergens* og *konvergens* av en vektorfunksjon, avsnitt A.9.2 *Martin Flügge*
- 21. januar 2010** Rettet definisjon av *breddegrad* og *lengdegrad*, blant annet i avsnitt A.13.2 *Cecilie Villanger*
- 21. januar 2010** Oppdatert det radielt deriverte leddet i divergensen til et hastighetsfelt i kulekoordinater, blant annet i avsnitt A.11.2
- 24. januar 2010** (Mulig) Framtidige oppgaver har blitt kommentert ut
- 27. januar 2010** Rettet R (avstand mellom jordens rotasjonsakse og et punkt på jorden) og r (jordens radius) i avsnitt 1.5.16
- Februar 2010** Lagt inn en del løsningsforslag til oppgaver
- 9. mars 2010** Rettet første setning i avsnitt (2.8) fra *z-koordinater* til *trykk-koordinater* *Cecilie Villanger*
- 9. mars 2010** Rettet fortegn i ligning (??)
- 11. mars 2010** Rettet diskusjon i avsnitt 2.10.4 *Aurora Stenmark*
- 12. mars 2010** Rettet $\partial/\partial y$ til ∂/∂
- 16. mars 2010** Rettet δx til δy i beregningen av geostrofisk hastighet i posisjonen til rød sirkel *Siiri Wickstrøm*
- 20. april 2010** Rettet τ_{vind}/f i (484)
- 20. april 2010** Rettet f^2 i (491)
- 21. april 2010** Små justeringer i teksten om Sverdrupbalanse
- 13. juni 2010** Rettet a^2 til a i (??), og km til m i utregningen under *Erik Rostad*

G Register

Ageostrofi, 116

Akselerasjon

Coriolis, 26

Fiktiv, 26

Sentrifugal, 26

Brunt-Väisälä frekvens, 64

Coriolisparameter, 30

Margules sammenheng, 69

Oppdriftsfrekvens, 64

Redusert gravitasjon, 66

Rossby deformasjonsradius, 71

Spinn, 66

Spinnsats, 66

Taylor-Proudman teorem, 126

Taylorrekke, 154