Oppgåver:

1. Lat

$$\mathbf{f}(x_1, x_2, x_3) = \mathbf{f}(r)\,,$$

der

$$r = \{(x_1 - x_1')^2 + (x_2 - x_2')^2 + (x_3 - x_3')^2\}^{\frac{1}{2}}\,.$$

Syn at

$$\nabla \mathbf{f} = -\nabla' \mathbf{f}\,, \tag{5.45}$$

når

$$\nabla = \mathbf{e}_i \frac{\partial}{\partial x_i}\ , \ \nabla' = \mathbf{e}_i \frac{\partial}{\partial x_i'}\,. \tag{5.46}$$

2. Syn v.h.a. resultatet i (1) at $\nabla \cdot \mathbf{F} = 0$ der $\mathbf{F}$ er gjeven ved likn.(5.43).

Kapittel 6

TENSORANALYSE

6.1 INNLEIING

Vi ser på dei generelle koordinat transformasjonane $x^i = x^i(x_1, x_2, x_3)$, $i = 1, 2, 3$, der x_1, x_2 og x_3 kan vera vanlege rettvinkla kartesiske koordinatar og x^i er krumline-koordinatar. For krumline-koordinatane x^1, x^2, x^3 er det to basis vektorsystem som peikar seg ut, nemleg

$$\mathbf{e}_i = \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial x^i} \quad \text{og} \quad \mathbf{e}^i = \nabla x^i \, . \tag{6.1}$$

Vi kan skriva ein vilkårleg vektor $\mathbf{v}$ som

$$\mathbf{v} = v^i \mathbf{e}_i = v_i \mathbf{e}^i \, . \tag{6.2}$$

Skifter vi koordinatar frå x^i til $\bar{x}^i$ slik at $\bar{x}^i = \bar{x}^i(x^1, x^2, x^3)$, $i = 1, 2, 3$, så har vi

$$\begin{aligned}
\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial \bar{x}^i} &= \frac{\partial x^j}{\partial \bar{x}^i} \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial x^j} \qquad \text{eller} \qquad \bar{\mathbf{e}}_i = \frac{\partial x^j}{\partial \bar{x}^i} \mathbf{e}_j \, , \\
\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial x^i} &= \frac{\partial \bar{x}^j}{\partial x^i} \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial \bar{x}^j} \qquad \text{eller} \qquad \mathbf{e}_i = \frac{\partial \bar{x}^j}{\partial x^i} \bar{\mathbf{e}}_j \, , \\
\nabla \bar{x}^i &= \frac{\partial \bar{x}^i}{\partial x^j} \nabla x^j \qquad \text{eller} \qquad \bar{\mathbf{e}}^i = \frac{\partial \bar{x}^i}{\partial x^j} \mathbf{e}^j \, , \\
\nabla x^i &= \frac{\partial x^i}{\partial \bar{x}^j} \nabla \bar{x}^j \qquad \text{eller} \qquad \mathbf{e}^i = \frac{\partial x^i}{\partial \bar{x}^j} \bar{\mathbf{e}}^j \, .
\end{aligned} \tag{6.3}$$

Frå dette ser vi at dei to basissystema transformerer på ulik måte, og vi har at

$$\begin{aligned} \mathbf{v} &= v^i \mathbf{e}_i = \frac{\partial \bar{x}^j}{\partial x^i} v^i \bar{\mathbf{e}}_j = \bar{v}^j \bar{\mathbf{e}}_j = \frac{\partial x^i}{\partial \bar{x}^j} \bar{v}^j \mathbf{e}_i \\ &= v_i \mathbf{e}^i = \frac{\partial x^i}{\partial \bar{x}^j} v_i \bar{\mathbf{e}}^j = \bar{v}_j \bar{\mathbf{e}}^j = \frac{\partial \bar{x}^j}{\partial x^i} \bar{v}_j \mathbf{e}^i \,. \end{aligned} \tag{6.4}$$

Vi ser at den same vektoren $\mathbf{v}$ let seg representere på ulike måtar relativt til dei ulike basis systema og ulike koordinatsystem. Det vi spesielt skal merka oss her er at dei to typane vektorkomponentar med indeks oppe og indeks nede transformere ulikt når vi skifter koordinatar. Dette er eigentleg ikkje så merkeleg sidan dei to basissystema $\mathbf{e}_i$ og $\mathbf{e}^i$ er definerte på ulik måte, med det første systemet referert til tangent vektorane til koordinatlinene og det andre systemet til normal vektorane til koordinatflatene. Dei transformasjonslovane vi har funne kan vi skriva slik:

$$\begin{aligned} \bar{v}_i = \frac{\partial x^j}{\partial \bar{x}^i} v_j \quad &\text{og} \quad \bar{v}^i = \frac{\partial \bar{x}^i}{\partial x^j} v^j \,, \\ v_i = \frac{\partial \bar{x}^j}{\partial x^i} \bar{v}_j \quad &\text{og} \quad v^i = \frac{\partial x^i}{\partial \bar{x}^j} \bar{v}^j \,. \end{aligned} \tag{6.5}$$

Vi skal heretter kalla vektorkomponentar med indeks nede for kovariante og dei med indeks oppe for kontravariante komponentar. Ein ser ofte i litteraturen uttrykka kovariante og kontravariante vektorar brukt, men dette er misvisande og uheldig språkbruk sidan vektoren korkje er kovariant eller kontravariant, men *invariant*. Det er nemleg den invariante vektoren som er *basis* for vårt val av transformasjons lovene. Vi skal prøva å vera konsekvent med desse nemingane i innleinga, men seinare når dette ikkje kan mistydast skal vi vera meir i samsvar med vanleg språkbruk.

$$\begin{aligned} \bar{v}_i &= \frac{\partial x^j}{\partial \bar{x}^i} v_j \qquad \text{(den kovariante transformasjons lova)}\,, \\ \bar{v}^i &= \frac{\partial \bar{x}^i}{\partial x^j} v^j \qquad \text{(den kontravariante transformasjons lova)}\,. \end{aligned} \tag{6.6}$$

Vi har hittil referert til dei to basis systema $\mathbf{e}_i$ og $\mathbf{e}^i$, men i tensoranalysen frigjer ein seg frå basis systema ved å innføra det vi skal kalla metrikktensoren g_{ij} og g^{ij} definert ved:

$$
\begin{aligned}
g_{ij} &\stackrel{def}{=} \mathbf{e}_i \cdot \mathbf{e}_j \, , \\
g^{ij} &\stackrel{def}{=} \mathbf{e}^i \cdot \mathbf{e}^j \, , \\
g^i_j &\stackrel{def}{=} \mathbf{e}^i \cdot \mathbf{e}_j = \delta^i_j \, .
\end{aligned} \tag{6.7}
$$

Merk at $g_{ij} = g_{ji}$ og $g^{ij} = g^{ji}$ og $g^i_j = g^j_i$, vi har med andre ord symmetri i indeksane i og j. Vi har difor seks uavhengige storleikar g_{ij} og tilsvarande for g^{ij}, saman med $g^j_i = g^i_j = \delta^i_j$ inneheld dette all informasjon om dei to basis systema våre. Til dømes så har vi:

$$
\begin{aligned}
&\mathbf{e}_1 \cdot \mathbf{e}_1 = g_{11} \ \ \text{(bestemmer lengda av } \mathbf{e}_1) \, , \\
&\mathbf{e}_1 \cdot \mathbf{e}_2 = \sqrt{g_{11} \ g_{22}} \cos\theta = g_{12} \, , \ \ \cos\theta = \tfrac{g_{12}}{\sqrt{g_{11} g_{22}}} \, ,
\end{aligned} \tag{6.8}
$$

der θ er vinkelen mellom $\mathbf{e}_1$ og $\mathbf{e}_2$, tilsvarande finn ein lengder og vinklar for dei andre vektorane $\mathbf{e}_i$ og $\mathbf{e}^i$ uttrykt ved g_{ij} og g^{ij}. Sidan einingsdyaden er gjeven ved

$$
I = \mathbf{e}_i \mathbf{e}^i = \mathbf{e}^i \mathbf{e}_i \, , \tag{6.9}
$$

så har vi også

$$
I = g_{ij} \mathbf{e}^i \mathbf{e}^j = g^{ij} \mathbf{e}_i \mathbf{e}_j \, . \tag{6.10}
$$

Slik at g_{ij} og g^{ij} også representerer koeffisientane til einingsdyaden i basissystema $\mathbf{e}^i \mathbf{e}^j$ og $\mathbf{e}_i \mathbf{e}_j$.

Etter desse innleidande merknadane skal vi gå over til ei meir formell innføring i tensor anlayse.

6.2 DEFINISJONAR OG OMGREP

Summasjonskonvensjonen: Dersom ein har to like indeksar (ein oppe og ein nede) så skal ein summera over desse indeksane over heile den rekkjevidde indeksane har. (Einsteins summasjonskonvensjon, denne har vi alt brukt i innleiinga.)

Dimensjon: I den føregåande drøftinga har vi operert i eit 3-dimensjonalt rom for å gjera det heile meir oversiktleg. Når vi no ser på dei formelle definisjonane, skal vi tenkja oss eit N-dimensjonalt rom og tilsvarande N-koordinat-transformasjonar

$$\bar{x}^i = \bar{x}^i(x^1, x^2, \ldots, x^N) \quad i = 1, 2, \ldots, N \ \text{ eller } \ \bar{\mathbf{x}} = \bar{\mathbf{x}}(\mathbf{x})\,. \tag{6.11}$$

Vi skal heretter stort sett bruka den siste skrivemåten.

Transformasjonar: Vi skal avgrensa oss til det vi vil kalla:
Godtakande transformasjonar.
Ein slik transformasjon i R^N har vi når jacobimatrisa for transformasjonen har rang N, d.v.s. når jacobideterminanten er ulik 0. Det er lett å syna at mengda av godtakande transformasjonar lagar ei gruppe: To påfølgjande transformasjonar med jacobideterminant J_1 og J_2 er ein ny transformasjon med jacobideterminant $J_3 = J_1 J_2 \neq 0$. Den inverse transformasjonen eksisterer opplagt. Den assosiative lova $T_3(T_2T_1) = (T_3T_2)T_1$ held. Her står T_i for ein transformasjon.
Med andre ord kan ein syna at lovane for ei abstrakt gruppe gjeld.

Skalarfelt: Lat p vera eit punkt i R^N og ϕ ein funksjon som er tilordna ein og berre ein verdi i kvart punkt p. Vi kallar då ϕ ein skalarfunksjon eller eit *skalarfelt*. Eit skalarfelt er opplagt invariant med omsyn på koordinat transformasjonar dersom vi har at

$$\phi = \phi(\mathbf{x}) = \phi(\mathbf{x}(\bar{\mathbf{x}})) = \bar{\phi}(\bar{\mathbf{x}})\,, \tag{6.12}$$

slik at $\bar{\phi}(\bar{\mathbf{x}})$ er eintydig bestemt gjennom *invarians*.

Definisjon 6.1 *Eit skalarfelt er ein tensor av* 0*-te orden.*

6.2.1 Tensorar av første orden

Ein tensor av første orden er ein vektor, og denne kan representerast på to måtar ved hjelp av kovariante eller kontravariante tensorkomponentar.

Definisjon 6.2 *Vi har ein kovariant representasjon av ein tensor* $\{A_i(\mathbf{x})\}$ *av første orden og dimensjon* N *når* $\bar{A}_i(\bar{\mathbf{x}})$ *under transformasjonen* $\bar{\mathbf{x}} = \bar{\mathbf{x}}(\mathbf{x})$, $\mathbf{x} = (x^1, x^2, \ldots, x^N)$, $i = 1, 2, 3 \ldots N$, *er relatert til* $A_i(\mathbf{x})$ *gjennom den kovariante transformasjonslova*

$$\bar{A}_i(\bar{\mathbf{x}}) = \frac{\partial x^j}{\partial \bar{x}^i} A_j(\mathbf{x})\,.$$

Definisjon 6.3 *Vi har tilsvarande til definisjon* **6.2** *ein kontravariant representasjon av ein tensor når relasjonen mellom* $\bar{A}^i$ *og* A^i *er gjeven ved den kontravariante transformasjonslova*

$$\bar{A}^i(\bar{\mathbf{x}}) = \frac{\partial \bar{x}^i}{\partial x^j} A^j(\mathbf{x}) \,.$$

Merk at slik vi brukar omgrepet tensor her står det for totaliteten $\{A_i\} = \{A^i\}$ der A^i og A_i er komponentar i den ko- eller kontravariante representasjonen. Ein tensor av første orden er difor korkje ko- eller kontravariant, men *invariant*. Det er nemleg heile poenget med den ko- og kontravariante transformasjons lova.

6.2.2 Tensorar av 2.orden

Vi ser på ein dyade $\mathbf{uv}$, denne kan representerast på fleire måtar

$$\mathbf{uv} = u^i v^j \mathbf{e}_i \mathbf{e}_j = u_i v_j \mathbf{e}^i \mathbf{e}^j = u^i v_j \mathbf{e}_i \mathbf{e}^j = u_i v^j \mathbf{e}^i \mathbf{e}_j \,. \tag{6.13}$$

Vi ser vidare på transformasjonen

$$\begin{aligned} \mathbf{x} \;&\rightarrow\; \bar{\mathbf{x}} \,, \\ \mathbf{e}_i &= \frac{\partial \bar{x}^j}{\partial x^i} \bar{\mathbf{e}}_j \,, \\ \mathbf{e}^i &= \frac{\partial x^i}{\partial \bar{x}^j} \bar{\mathbf{e}}^j \,. \end{aligned} \tag{6.14}$$

Det følgjer av dette at vi kan skriva

$$\begin{aligned} \mathbf{uv} &= u^i v^j \frac{\partial \bar{x}^k}{\partial x^i} \frac{\partial \bar{x}^l}{\partial x^j} \bar{\mathbf{e}}_k \bar{\mathbf{e}}_l \\ &= u_i v_j \frac{\partial x^i}{\partial \bar{x}^k} \frac{\partial x^j}{\partial \bar{x}^l} \bar{\mathbf{e}}^k \bar{\mathbf{e}}^l \\ &= u^i v_j \frac{\partial \bar{x}^k}{\partial x^i} \frac{\partial x^j}{\partial \bar{x}^l} \bar{\mathbf{e}}_k \bar{\mathbf{e}}^l \\ &= u_i v^j \frac{\partial x^i}{\partial \bar{x}^k} \frac{\partial \bar{x}^l}{\partial x^j} \bar{\mathbf{e}}^k \bar{\mathbf{e}}_l \\ &= \bar{u}^k \bar{v}^l \bar{\mathbf{e}}_k \bar{\mathbf{e}}_l \,. \end{aligned} \tag{6.15}$$

Ut frå dette er det naturleg med følgjande definisjonar:

Definisjon 6.4 *Vi har ein kovariant representasjon av ein tensor* $A = \{A_{ij}\}$ *av andre orden og dimensjon* N *når* $\bar{A}_{ij}(\bar{\mathbf{x}})$ *under transformasjonen* $\bar{\mathbf{x}} = \bar{\mathbf{x}}(x^1, x^2, \ldots, x^N)$, $i, j = 1, 2, \ldots N$ *er relatert til* A_{ij} *gjennom den kovariante transformasjonslova*

$$\bar{A}_{kl}(\bar{\mathbf{x}}) = \frac{\partial x^i}{\partial \bar{x}^k}\frac{\partial x^j}{\partial \bar{x}^l}A_{ij}(\mathbf{x})\,.$$

Definisjon 6.5 *Vi har tilsvarande til definisjon* **6.4** *ein kontravariant representasjon av ein tensor når relasjonen mellom* $\bar{A}^{ij}$ *og* A^{ij} *er gjeven ved den kontravariante transformasjonslova*

$$\bar{A}^{kl}(\bar{\mathbf{x}}) = \frac{\partial \bar{x}^k}{\partial x^i}\frac{\partial \bar{x}^l}{\partial x^j}A^{ij}(\mathbf{x})\,.$$

Men vi merkar oss også at for ein 2.ordens tensor, har vi to andre moglege representasjonar som korkje er kovariante eller kontravariante. Desse representasjonane skal vi kalla *blanda* tensorkomponentar. Vi skrive desse slik:

$$\begin{aligned}\bar{A}^{k}_{\cdot l}(\bar{\mathbf{x}}) &= \frac{\partial \bar{x}^k}{\partial x^i}\frac{\partial x^j}{\partial \bar{x}^l}A^{i}_{\cdot j}(\mathbf{x})\,,\\ \bar{A}_{k}^{\cdot l}(\bar{\mathbf{x}}) &= \frac{\partial x^i}{\partial \bar{x}^k}\frac{\partial \bar{x}^l}{\partial x^j}A_{i}^{\cdot j}(\mathbf{x})\,.\end{aligned} \tag{6.16}$$

Merk at vi har brukt ein " $\cdot$ " til å markera posisjonen eller rekkjefølgja av dei to indeksane. Dette er viktig, dersom ein tenkjer seg ein dyade representasjon, så er det rekkjefølgja på indeksane som fortel kva rekkjefølgje basisvektorane har. Vi har innleiingsvis innført det vi kalla metrikktensoren, representert ved g^{ij}, g^i_j og g_{ij}. Ta som oppgåve og syn ut frå dei generelle definisjonane at g_{ij}, g^i_j og g^{ij} er den kovariante, blanda og kontravariante representasjonen av ein tensor, d.v.s. *Metrikktensoren* eller G.

6.2.3 Tensorar av vilkårleg orden

Generell definisjon: Vi definerer ein blanda tensor av vilkårleg orden ved følgjande transformasjonslov,

$$\bar{A}^{ijk\ldots}_{pqr\ldots} = \frac{\partial \bar{x}^i}{\partial x^l}\frac{\partial \bar{x}^j}{\partial x^m}\frac{\partial \bar{x}^k}{\partial x^n}\cdots\frac{\partial x^s}{\partial \bar{x}^p}\frac{\partial x^t}{\partial \bar{x}^q}\frac{\partial x^u}{\partial \bar{x}^r}A^{lmn\ldots}_{stu\ldots}\,. \tag{6.17}$$

Talet på indeksar nede $pqr\ldots$ gjev den kovariante orden og talet på indeksar oppe $ijk\ldots$ gjev den kontravariante orden, rekkjefylgja her er uspesifisert.

6.2.4 Utvida basis R^N

Vi har innført tensor omgrepet knytt til resiproke basis system. Men slike basis system har vi strengt teke berre innført for tre dimensjonar. Vi skal sjå korleis omgrepet resiproke sett lett let seg utvida til R^N.
Lat vektor settet $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \ldots, \mathbf{e}_N$ vera ein basis for R^N. Definer $g_{ij} = g_{ji} = \mathbf{e}_i \cdot \mathbf{e}_j$ (skalarproduktet i R^N). No kan vi sjå på g_{ij} som eit matrise element i ei $N \times N$ symmetrisk matrise. På grunn av at $\mathbf{e}_i$ er ein basis, så må determinanten $\det(g_{ij}) \neq 0$, matrisa med elementa g_{ij} har difor ei invers matrise der vi skal kalla elementa g^{ij}. Vi definerer no eit nytt sett vektorar

$$\mathbf{e}^i = g^{ij}\mathbf{e}_j \,. \tag{6.18}$$

For dette nye settet av vektorar gjeld det at

$$\mathbf{e}^i \cdot \mathbf{e}_j = g^{ik}\mathbf{e}_k \cdot \mathbf{e}_j = g^{ik}g_{kj} = \delta^i_j \,. \tag{6.19}$$

Den siste relasjonen kjem naturlegvis av at vi definerte matrisa med element g^{ij} som den inverse til matrisa med element g_{ij}. Merk også at desse matrisene er symmetriske. Dessutan er $\det(g^{ij}) \neq 0$ og settet $\mathbf{e}^i$ er difor ein ny basis. Vidare kan vi definera einingselementet

$$\mathbf{e}_i\mathbf{e}^i = \mathbf{e}^i\mathbf{e}_i = g_{ij}\mathbf{e}^j\mathbf{e}^i = g^{ij}\mathbf{e}_j\mathbf{e}_i \,, \tag{6.20}$$

og

$$g^j_i = \mathbf{e}^i \cdot \mathbf{e}_j = \mathbf{e}_i \cdot \mathbf{e}^j = \delta^i_j \,. \tag{6.21}$$

Vi har difor at settet $\mathbf{e}^i$ er eit resiprokt sett til $\mathbf{e}_i$.

6.3 Algebra for tensorar

6.3.1 Addisjon

Dersom to tensorar har same orden og dimensjon, så kan vi addera dei dersom dei har same representasjon. T.d. har vi for to tensorar $\{A_{ij}\}$ og $\{B_{ij}\}$ at C_{ij} er den kovariante komponenten av ein tensor definert ved

$$C_{ij} = A_{ij} + B_{ij} \,. \tag{6.22}$$

Der er lett å visa at C-tensoren definert på denne måten er ein tensor. Tilsvarande definerer ein addisjon av tensorar i andre representasjonar ved komponentvis addisjon.
Det er også lett å visa at dersom vi multipliserer alle komponentane til ein tensor i ein viss representasjon med ein konstant, så får vi ein ny tensor. Lat α og β vera to konstantar, då kan vi laga ein ny tensor

$$C^{ij} = \alpha A^{ij} + \beta B^{ij} \,. \tag{6.23}$$

Spesielt kan vi velja $\alpha = 1$ og $\beta = -1$ og får på den måten definert subtraksjon av to tensorar.

Definisjon 6.6 Symmetri. *Ein tensor er symmetrisk i to indeksar av same type dersom tensorkomponentane er uendra ved ombyting av indeksane.* Skeivsymmetri. *Ein tensor er skeivsymmetrisk eller antisymmetrisk dersom komponentane skifter forteikn ved ombyting av to indeksar av same type.*

Ein vilkårleg tensor kan skrivast som summen av ein symmetrisk tensor og ein antisymmetrisk tensor. Vis det !

6.3.2 Multiplikasjon

Vi skal definera to typar tensor produkt, det vi skal kalla *ytreprodukt* ("ekspansjon") og *indreprodukt* (kontraksjon"). Vi skal visa dette ved eit par døme:
Ytreprodukt:

$$\begin{aligned} A^{ij}B^{k} &= C^{ijk} \,, \\ A^{i}B_{jk} &= C^{i}_{.jk} \,. \end{aligned} \tag{6.24}$$

Ved eit ytreprodukt vil orden av tensorane auka ("ekspandera") til å bli summen av orden av dei to tensorane ein multipliserer saman. Formelt må ein visa at dei elementa ein produserer ved ein slik produkt-regel er ein tensor. Vis dette for eit par døme ! Typen av den nye tensoren, som ein får produsert ved eit ytre produkt, er karakterisert ved indeksane (dette svarar til ubestemt produkt i dyade samanheng).
Divisjon av ein tensor blir vanlegvis ikkje definert.

6.3.3 Kontraksjon

Vi skal forklara prosedyren med kontraksjon ved eit par døme. Vi ser på tensoren representert ved komponentane

$$A^{ij}_{\cdot\cdot klm} \,. \tag{6.25}$$

Frå definisjon har vi

$$\bar{A}^{st}_{\cdot\cdot pqr} = \frac{\partial \bar{x}^s}{\partial x^i}\frac{\partial \bar{x}^t}{\partial x^j}\frac{\partial x^k}{\partial \bar{x}^p}\frac{\partial x^l}{\partial \bar{x}^q}\frac{\partial x^m}{\partial \bar{x}^r} A^{ij}_{\cdot\cdot klm} \,. \tag{6.26}$$

Dersom vi set $s = p$ og summerer over s (merk summasjonskonvensjonen), så har vi

$$\bar{A}^{st}_{\cdot\cdot sqr} = \frac{\partial \bar{x}^s}{\partial x^i}\frac{\partial \bar{x}^t}{\partial x^j}\frac{\partial x^k}{\partial \bar{x}^s}\frac{\partial x^l}{\partial \bar{x}^q}\frac{\partial x^m}{\partial \bar{x}^r} A^{ij}_{\cdot\cdot klm} \,, \tag{6.27}$$

sidan $\frac{\partial \bar{x}^s}{\partial x^i}\frac{\partial x^k}{\partial \bar{x}^s} = \frac{\partial x^k}{\partial x^i} = \delta^k_i$ og $\delta^k_i A^{ij}_{\cdot\cdot klm} = A^{ij}_{\cdot\cdot ilm}$, så har vi

$$\bar{A}^{st}_{\cdot\cdot sqr} = \frac{\partial \bar{x}^t}{\partial x^j}\frac{\partial x^l}{\partial \bar{x}^q}\frac{\partial x^m}{\partial \bar{x}^r} A^{ij}_{\cdot\cdot ilm} \,. \tag{6.28}$$

Med andre ord, denne operasjonen er invariant, sidan denne operasjonen i det eine koordinatsystemet induserer den same operasjonen i det andre koordinatsystemet. Vidare ser vi at resultatet er ein ny tensor av orden 2 mindre enn den vi starta ut med. I vårt tilfelle starta vi ut med ein tensor av 5-te orden og enda opp med ein tensor av 3-dje orden. Talet på *frie* indeksar i resultat tensoren er 3. Merk at den indeksen vi summerer over ikkje er fri, sidan

$$A^{st}_{\cdot\cdot sqr} \overset{\text{def}}{=} \sum_{s=1}^{N} A^{st}_{\cdot\cdot sqr} \,, \tag{6.29}$$

og tilsvarande for $A^{ij}_{\cdot\cdot ilm}$. Kvar komponent i den nye tensoren er difor samansett av ein sum av komponentar frå den gamle tensoren. Vi kunne gått eit steg vidare og summert over to andre indeksar av *ulik type*. På den måten kunne vi til dømes fått tensoren

$$A^{st}_{\cdot\cdot sqt} \,. \tag{6.30}$$

Dette er komponentane til ein ny kovariant tensor av orden 1, altså ein vektor, der kvar komponent er ein dobbel sum.

Definisjon 6.7 *Kontraksjon: Kontraksjon av ein tensor er ein prosedyre der ein set ein øvre (kontravariant) indeks lik ein nedre (kovariant) indeks og summerer over denne indeksen. Resultatet blir ein ny tensor og prosessen kan ein gjenta så lenge det er frie indeksar.*

Vi har no det apparatet som trengs for å definera indre produktet.

Definisjon 6.8 *Indreprodukt av to tensorar er resultatet av å kombinera ytreprodukt og kontraksjon.*

Lat $A^i_{.jk}$ og $B^{lm}_{..np}$ representera to tensorar. Det ytre produktet gjev

$$A^i_{.jk} B^{lm}_{..np} = C^{i..lm}_{.jk..np}\,, \tag{6.31}$$

og kontraksjon over seks indeksar gjev t.d.

$$D_j = C^{i..lm}_{.ji..lm}\,. \tag{6.32}$$

I det siste uttrykket har vi ein trippel sum over indeksane i, l, m. Merk at kontraksjonen skal vera over to indeksar av *ulik* type, berre denne prosedyren garanterer at resultatet vert ein ny tensor (invariant).

6.3.4 Skalarproduktet av to vektorar

Lat $\mathbf{u}$ og $\mathbf{v}$ vera to vektorar. Ved å ta det ytre produktet mellom tensor representasjonane u^i og v_j, får vi ein tensor

$$A^i_{.j} = u^i v_j\,. \tag{6.33}$$

Kontraksjon av denne tensoren gjev

$$A^i_{.i} = u^i v_i\,, \tag{6.34}$$

som er ein skalar og altså ein invariant (ein tensor av 0-te orden). Sidan vi har[1]

$$v_i = g_{ik} v^k\,, \tag{6.35}$$

[1] Sjå likn. (6.40)

så kan vi også skriva om uttrykket

$$\begin{aligned} u^i v_i &= g_{ik} u^i v^k = \mathbf{e}_i \cdot u^i v^k \mathbf{e}_k \,, \\ &= (u^i \mathbf{e}_i) \cdot (v^k \mathbf{e}_k) = \mathbf{u} \cdot \mathbf{v} \,. \end{aligned} \tag{6.36}$$

Og dette kjenner vi att som det vanlege skalarproduktet av to vektorar. Ser vi spesielt på lengda av ein vektor $\mathbf{u}$, så er den gjeven som

$$\mid \mathbf{u} \mid = \sqrt{u^i u_i} \,. \tag{6.37}$$

Vi merkar oss at dette blir spesielt enkelt når vi kjenner både dei ko- og dei kontravariante komponentane av vektoren.

6.3.5 Assosierte tensorar

Vi har hittil vore konsekvente med nemninga tensor og tensorkomponent eller representasjon av tensoren. Etter at dette no skulle vera klårt, skal vi slik det er vanleg i litteraturen ikkje lenger skilja mellom tensoren og ein representasjon av tensoren, slik at samanhengen vil gjera det klårt kva vi meiner.
Det kan ofte vera aktuelt å skifta representasjon for ein tensor, t.d. finna den kontravariante representasjonen når ein kjenner den kovariante. Dette kan ein gjera ved ein prosedyre som tillet ein å lyfta eller senka indeksar. G-tensoren gjeven ved dei ulike representasjonane g_{ij} , g^i_j og g^{ij} er tenleg til dette.
Vi ser på ein vektor med kontravariant representasjon A^k. Ytre-produktet med g_{ij} - tensoren gjev

$$B_{ij}^{\cdot\cdot k} = g_{ij} A^k \,, \tag{6.38}$$

kontraksjon av denne nye tensoren gjev

$$C_i = B_{ij}^{\cdot\cdot j} = g_{ij} A^j \,. \tag{6.39}$$

Det er lett å visa at $C_i = A_i$. Skriv $A = \mathbf{e}^i A_i = \mathbf{e}_j A^j$, ta så og skalarmultipliser denne likninga med $\mathbf{e}_k$ (og deretter med $\mathbf{e}^k$) og vi får

$$A_k = g_{kj} A^j \,, \tag{6.40}$$

og

$$A^k = g^{ki} A_i \,. \tag{6.41}$$

Vi kan altså bruka G-tensoren som eit instrument til å flytta indeksar opp og ned. Med andre ord skifta frå ein representasjon til ein annan for ein gjeven tensor.
Til dømes så har vi for tensoren representert ved $A^{ijk}_{\cdot\cdot\cdot lm}$ at

$$A^{\cdot jk}_{r\cdot\cdot lm} = g_{ri} A^{ijk}_{\cdot\cdot\cdot lm} \,. \tag{6.42}$$

Vi har oppnådd å skifta indeksen i frå å vera kontravariant til den kovariante indeksen r. Merk at indeksen har same posisjon.

Vi hugsar at metrikktensoren har eigenskapen

$$g_{ij} g^{jk} = \delta_i^k \,. \tag{6.43}$$

Vinkelen mellom to vektorar.

Vi definerer vinkelen mellom to einingsvektorar $\mathbf{A}$ og $\mathbf{B}$ ved

$$\cos\,\theta = A^i B_i = A_j B^j = g^{ij} A_j B_i = g_{ij} A^j B^i \,. \tag{6.44}$$

Vis at denne formelen er i samsvar med den vanlege definisjonen av vinkelen mellom to vektorar. Dersom vektorane det er tale om ikkje er einingsvektorar, har vi alt definert lengda av ein vektor slik at vi kan normalisera han.

6.3.6 Kvotsient lova

Ein står stundom andsynes problemet å avgjera om eit sett funksjonar er komponentante til ein tensor. Den beinveges metoden med å sjå om kvar av komponentane stettar transformasjonslova kan vera brysam. Til hjelp med slike problem har ein det som blir kalla kvotsient lova. Kvotsientlova seier:

Teorem 6.1 *N^p funksjonar av $\{x^i\}$ (N er dimensjonen og p ordenen på tensoren) lagar komponentane i ein tensor (den kontravariante og kovariante karakteren av vedkomande tensor er kjend) når indreproduktet med ein vilkårleg tensor sjølv er ein tensor.*

Provet for dette går på følgjande måte.

Vi ser på særtilfellet der spørsmålet er om settet av N^3 funksjonar A^{ijk} representerer ein tensor av den typen indeksane indikerer. Svaret er ja og det ser vi slik. Vi har som utgangspunkt

$$A^{ijk}B^p_{.ij} = C^{kp}\,, \tag{6.45}$$

der $B^p_{.ij}$ er ein vilkårleg tensor og C^{kp} er ein tensor. Frå transformasjonslovene har vi

$$\bar{A}^{ijk}\bar{B}^p_{.ij} = \bar{C}^{kp}\,, \tag{6.46}$$

der vi enno ikkje veit om $\bar{A}^{ijk}$ transformerer som ein tensor, men vi har

$$\bar{B}^p_{.ij} = \frac{\partial \bar{x}^p}{\partial x^l}\frac{\partial x^m}{\partial \bar{x}^i}\frac{\partial x^n}{\partial \bar{x}^j}B^l_{.mn}\,, \tag{6.47}$$

$$\bar{C}^{kp} = \frac{\partial \bar{x}^k}{\partial x^q}\frac{\partial \bar{x}^p}{\partial x^r}C^{qr}\,. \tag{6.48}$$

Når vi set dette inn i likn.(6.46) og brukar likn.(6.45), så får vi

$$\bar{A}^{ijk}\frac{\partial \bar{x}^p}{\partial x^l}\frac{\partial x^m}{\partial \bar{x}^i}\frac{\partial x^n}{\partial \bar{x}^j}B^l_{.mn} = \frac{\partial \bar{x}^k}{\partial x^q}\frac{\partial \bar{x}^p}{\partial x^r}A^{ijq}B^r_{.ij}\,. \tag{6.49}$$

Vi byter ut summasjonsindeksane r med l , i med m og j med n, då kan vi skriva likninga ovanfor som

$$\frac{\partial \bar{x}^p}{\partial x^l}(\bar{A}^{ijk}\frac{\partial x^m}{\partial \bar{x}^i}\frac{\partial x^n}{\partial \bar{x}^j} - \frac{\partial \bar{x}^k}{\partial x^q}A^{mnq})B^l_{.mn} = 0\,. \tag{6.50}$$

Vi multipliserer denne likninga med $\frac{\partial x^s}{\partial \bar{x}^p}$ og summerer, og sidan

$$\frac{\partial x^s}{\partial \bar{x}^p}\frac{\partial \bar{x}^p}{\partial x^l} = \frac{\partial x^s}{\partial x^l} = \delta^s_l\,, \tag{6.51}$$

får vi

$$(\bar{A}^{ijk}\frac{\partial x^m}{\partial \bar{x}^i}\frac{\partial x^n}{\partial \bar{x}^j} - \frac{\partial \bar{x}^k}{\partial x^q}A^{mnq})B^s_{.mn} = 0\,. \tag{6.52}$$

Då $B^s_{.mn}$ representer ein vilkårleg tensor, så kan vi alltid velja alle elementa lik null unnateke eitt, og for dette valet må parentesen vera null. Men då dette elementet kan veljast vilkårleg må parentesen vera null for alle val av s, m og n, altså

$$\bar{A}^{ijk}\frac{\partial x^m}{\partial \bar{x}^i}\frac{\partial x^n}{\partial \bar{x}^j} - \frac{\partial \bar{x}^k}{\partial x^q}A^{mnq} = 0\,. \tag{6.53}$$

Multiplikasjon med $\frac{\partial \bar{x}^r}{\partial x^m}\frac{\partial \bar{x}^s}{\partial x^n}$ og summasjon over m og n gjev

$$\bar{A}^{ijk}\delta_i^r\delta_j^s - \frac{\partial \bar{x}^k}{\partial x^q}\frac{\partial \bar{x}^r}{\partial x^m}\frac{\partial \bar{x}^s}{\partial x^n}A^{mnq} = 0\,, \tag{6.54}$$

eller

$$\bar{A}^{rsk} = \frac{\partial \bar{x}^r}{\partial x^m}\frac{\partial \bar{x}^s}{\partial x^n}\frac{\partial \bar{x}^k}{\partial x^q}A^{mnq}\,, \tag{6.55}$$

som viser at A^{ijk} med dei gjevne føresetnader transformerer som ein kontravariant tensor av tredje orden.

Q.E.D.

Viktig merknad: Null-tensoren av vilkårleg orden er den tensoren der alle element er null for ein gjeven representasjon. Det følgjer då at nulltensoren er null i alle representasjonar og i alle koordinatsystem. Vis det ! Merk at overgangen frå ein representasjon til ein annen, (lyfting og senking av indeksar) er ein lineær transformasjon i komponentane og det same gjeld skifte av koordinatar.

6.3.7 Line-elementet

Line-elementet spelar ofte ei sentral rolle i problem der "geometrien" av systemet er vesentlig, t.d. på ei kuleflate, på ei sylinderflate o.s.b. Ein definerer gjerne line- elementet i eit rettvinkla kartesisk rom som

$$ds^2 = dx^2 + dy^2 + dz^2\,. \tag{6.56}$$

Med andre ord Pythagoras setning i tre dimensjonar. Generalisering av dette inn i N-dimensjonar og med generelle koordinat-representasjonar, blir at vi ser på vektor differensialet

$$d\mathbf{r} \stackrel{\text{def}}{=} \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial x^i}dx^i = \mathbf{e}_i dx^i\,, \tag{6.57}$$

kvadratet av lengda på dette elementet finn ein ved å ta det indre produktet eller skalar produktet

$$d\mathbf{r} \cdot d\mathbf{r} = \mathbf{e}_i \cdot \mathbf{e}_j dx^i dx^j = g_{ij} dx^i dx^j \,. \tag{6.58}$$

I samsvar med dette definerer vi line-elementet som

$$ds^2 = g_{ij} dx^i dx^j \,. \tag{6.59}$$

For rettvinkla kartesiske koordinatar har vi $g_{ij} = \delta_{ij}$ slik at denne definisjonen fell saman med den ein har for kartesiske koordinatar. Kvifor er line- elementet ein invariant ?

Lengda av ei kurve med parameterframstelling $x^i = x^i(t)$, mellom punkta med parameterverde t_1 og t_2 , er no gjeven ved integralet

$$s = \int_{t_1}^{t_2} \sqrt{g_{ij} \frac{dx^i}{dt} \frac{dx^j}{dt}} dt \,. \tag{6.60}$$

Vi skal koma attende til line-elementet i samband med ulike typar metriske rom. Men vi merkar oss her at line- elementet er sterkt knytt til metrikktensoren. Ofte blir metrikktensoren gjeven ved å gjeva line-elementet eksplisitt.

6.3.8 Absolutte og relative tensorar

Dei tensorane vi har studert er det ein kallar absolutte tensorar. Ein kan utvida tensor omgrepet til ein vidare klasse som vi skal kalla relative tensorar. Vi minnast at det som avgjer om vi har ein tensor er transformasjonslovene. Vi definerer no ein relativ tensor av vekt M ved

$$\bar{T}^{ij}_{\cdot\cdot k} = \mid \frac{\partial x}{\partial \bar{x}} \mid^M \frac{\partial \bar{x}^i}{\partial x^l} \frac{\partial \bar{x}^j}{\partial x^m} \frac{\partial x^n}{\partial \bar{x}^k} T^{lm}_{\cdot\cdot n} \,, \tag{6.61}$$

der dette er ein relativ tensor kovariant av orden ein og kontravariant av orden to, relative tensorar av vilkårleg orden blir definert tilsvarande. Absolutte tensorar er relative tensorar av vekt null. Ein kan utvikla tilsvarande rekneregler som det ein har for absolutte tensorar også med omsyn til kovariant derivasjon (sjå avsnitt **6.4**), men det fører for langt her. Merk at $\mid \partial x / \partial \bar{x} \mid$ er jacobideterminanten. Elles kan ein visa at permutasjonssymbola ϵ_{ijk} og ϵ^{ijk} er den ko- og kontravariante representasjonen av relative tensorar av orden 3 og vekt -1 og $+1$. Vi skal i det som følgjer avgrensa oss til å studera absolutte tensorar.

6.3.9 Oppsummering tensoromgrepet

Tensorar er visse objekt som kan skrivast med indeksar. Indeksane kan vera to typar, kovariante eller kontravariante. Dei to indekstypane lyder ulike transformasjons lover. Lova for kovariant transformasjon og lova for kontravariant transformasjon. Tensoren er bunden til eit rom av gjeven dimensjon N. Indeksane kan vera frie eller bundne. Bundne indeksar skal summerast frå 1 til N. Frie indeksar kan veljast fritt i det aktuelle området (1 til N for kvar indeks), men i ei tensorlikning må det i alle ledd vera samsvar mellom dei frie indeksane. Orden på tensoren er bestemt av talet på frie indeksar. Tensoren er av ein viss type som er bestemt av indeksane (kovariante og kontravariante). Tensoren kan vera absolutt eller relativ av vekt M. Skjematisk har vi altså:

- Dimensjon , det same som dimensjonen på rommet (området ein summerer over, 1 til N)
- Orden (talet på frie indeksar).
- Type (bestemt av typen av indeksar).
- Vekt (tensoren kan vera absolutt, d.v.s. vekt 0, eller relativ, d.v.s. vekt M der vektfaktoren er $|\frac{\partial x}{\partial \bar{x}}|^M$).

6.4 DERIVASJON

6.4.1 Kovariant derivasjon

Derivasjon av ein tensor er noko komplisert fordi det ikkje berre er komponentane i ein viss representasjon som varierer frå punkt til punkt, men også basisvektorane. Med andre ord, vi treng å vita noko om den deriverte av desse basisvektorane. Vi startar med å sjå på $\partial \mathbf{e}_i/\partial x^j$. Sidan den deriverte av ein vektor er ein ny vektor, så kan vi skriva

$$\frac{\partial \mathbf{e}_i}{\partial x^j} = \Gamma^k_{ij}\mathbf{e}_k \,. \tag{6.62}$$

Der vi altså har representert den deriverte i den same basen med basisvektorar $\mathbf{e}_i$ $i = 1, 2, \ldots N$. Det første vi skal gjera er å bestemma koeffisientane Γ^k_{ij} ved hjelp av elementa i metrikktensoren g_{ij}. Vi har nemleg

$$\mathbf{e}^k \cdot \frac{\partial \mathbf{e}_i}{\partial x^j} = \Gamma^r_{ij} \mathbf{e}_r \cdot \mathbf{e}^k = \Gamma^r_{ij} \delta^k_r = \Gamma^k_{ij} \, , \tag{6.63}$$

og

$$\mathbf{e}_k \cdot \frac{\partial \mathbf{e}_i}{\partial x^j} = \Gamma^r_{ij} \mathbf{e}_r \cdot \mathbf{e}_k = \Gamma^r_{ij} g_{rk} \stackrel{\text{def}}{=} \Gamma_{ij,k} \, . \tag{6.64}$$

Multipliserer vi siste likninga med g^{ks} og summerer får vi også

$$\Gamma^s_{ij} = \Gamma_{ij,k} \, g^{ks} \, . \tag{6.65}$$

Vi har vidare at

$$\frac{\partial}{\partial x^k}(\mathbf{e}_i \cdot \mathbf{e}_j) = \frac{\partial}{\partial x^k} g_{ij} = \frac{\partial \mathbf{e}_i}{\partial x^k} \cdot \mathbf{e}_j + \frac{\partial \mathbf{e}_j}{\partial x^k} \cdot \mathbf{e}_i \, . \tag{6.66}$$

Ved å bruka resultata i likn.(6.64) i denne likninga finn vi

$$\frac{\partial g_{ij}}{\partial x^k} = \Gamma_{ik,j} + \Gamma_{jk,i} \, . \tag{6.67}$$

Ved syklisk permutasjon av indeksane i denne likninga finn vi også,

$$\frac{\partial g_{jk}}{\partial x^i} = \Gamma_{ji,k} + \Gamma_{ki,j} \, , \tag{6.68}$$

$$\frac{\partial g_{ki}}{\partial x^j} = \Gamma_{kj,i} + \Gamma_{ij,k} \, . \tag{6.69}$$

Vi har at $\partial \mathbf{e}_i / \partial x^j = \partial^2 \mathbf{r} / \partial x^i \partial x^j$, slik at $\partial \mathbf{e}_i / \partial x^j = \partial \mathbf{e}_j / \partial x^i$, altså symmetri i indeksane i og j. Det gjev

$$\Gamma^k_{ij} = \Gamma^k_{ji} \quad \text{og} \quad \Gamma_{ij,k} = \Gamma_{ji,k} \, . \tag{6.70}$$

Ved å summera likn.(6.68) og likn.(6.69), subtrahera likn.(6.67) og bruka symmetrien i likn.(6.70), så får vi

$$\Gamma_{ij,k} = \frac{1}{2} \{ \frac{\partial}{\partial x^i} g_{jk} + \frac{\partial}{\partial x^j} g_{ki} - \frac{\partial}{\partial x^k} g_{ij} \} \, . \tag{6.71}$$

Hugs at $g_{ij} = g_{ji}$. Frå likn.(6.65) har vi vidare at

$$\Gamma^k_{ij} = \Gamma_{ij,s}\, g^{sk} \,. \tag{6.72}$$

Ved å derivera $\mathbf{e}^i \cdot \mathbf{e}_j = \delta^i_j$, får vi at

$$\frac{\partial \mathbf{e}^i}{\partial x^k} \cdot \mathbf{e}_j + \mathbf{e}^i \cdot \frac{\partial \mathbf{e}_j}{\partial x^k} = 0 \,, \tag{6.73}$$

eller

$$\frac{\partial \mathbf{e}^i}{\partial x^k} \cdot \mathbf{e}_j = -\mathbf{e}^i \cdot \frac{\partial \mathbf{e}_j}{\partial x^k} = -\Gamma^i_{jk} \,. \tag{6.74}$$

Ved å multiplisera med $\mathbf{e}^j$ (ytreprodukt) og summera, så har vi

$$\frac{\partial \mathbf{e}^i}{\partial x^k} = -\Gamma^i_{jk}\, \mathbf{e}^j \,. \tag{6.75}$$

På grunn av at

$$\frac{\partial}{\partial \bar{x}^i} = \frac{\partial x^j}{\partial \bar{x}^i} \frac{\partial}{\partial x^j} \,, \tag{6.76}$$

så ser vi at operatoren $\partial/\partial x^i$ transformerer som ein kovariant vektor. Dette er grunnen til namnet *kovariant derivasjon*. I eldre litteratur ser ein gjerne notasjonane

$$[ij,k] \;=\; \Gamma_{ij,k} \qquad \text{(Christoffel symbolet av 1. slag)} \,, \tag{6.77}$$

$$\left\{ {i \atop jk} \right\} \;=\; \Gamma^i_{jk} \qquad \text{(Christoffel symbolet av 2. slag)} \,. \tag{6.78}$$

Vi har no følgjande resultat

$$\frac{\partial \mathbf{e}_i}{\partial x^j} = \Gamma^r_{ij}\, \mathbf{e}_r \qquad \text{og} \qquad \frac{\partial \mathbf{e}^i}{\partial x^j} = -\Gamma^i_{jr}\, \mathbf{e}^r \,, \tag{6.79}$$

der Γ^r_{ij} er gjeven ved likn.(6.72) og $\Gamma_{ij,k}$ ved likn.(6.71).

6.4.2 Gradienten

Sidan $\partial/\partial x^i$ transformerer som ein kovariant tensor (vektor), så er det naturleg å definera gradient operatoren

$$\nabla \stackrel{\text{def}}{=} \mathbf{e}^i \frac{\partial}{\partial x^i} = \nabla x^i \frac{\partial}{\partial x^i} \,. \tag{6.80}$$

Lat ein vilkårleg tensor vera representert som

$$\mathbf{T} = T^{ab\ldots c}_{ij\ldots k} \mathbf{e}_a \mathbf{e}_b \ldots \mathbf{e}_c \mathbf{e}^i \mathbf{e}^j \ldots \mathbf{e}^k \,, \tag{6.81}$$

der rekkjefølgja mellom ko- og kontravariante basisvektorar er uspesifiserte. Vi har då at

$$\begin{aligned}
\nabla \mathbf{T} = \mathbf{e}^h \frac{\partial}{\partial x^h} \mathbf{T} &= \frac{\partial T^{ab\ldots c}_{ij\ldots k}}{\partial x^h} \mathbf{e}^h \mathbf{e}_a \mathbf{e}_b \ldots \mathbf{e}_c \mathbf{e}^i \mathbf{e}^j \ldots \mathbf{e}^k \\
&+ T^{ab\ldots c}_{ij\ldots k} \mathbf{e}^h \{ \frac{\partial \mathbf{e}_a}{\partial x^h} \mathbf{e}_b \ldots \mathbf{e}_c \mathbf{e}^i \mathbf{e}^j \ldots \mathbf{e}^k \\
&+ \mathbf{e}_a \frac{\partial \mathbf{e}_b}{\partial x^h} \ldots \mathbf{e}_c \mathbf{e}^i \mathbf{e}^j \ldots \mathbf{e}^k \\
&+ \mathbf{e}_a \mathbf{e}_b \ldots \mathbf{e}_c \mathbf{e}^i \mathbf{e}^j \ldots \frac{\partial \mathbf{e}^r}{\partial x^h} \ldots \mathbf{e}^k \\
&\vdots \\
&+ \mathbf{e}_a \mathbf{e}_b \ldots \mathbf{e}_c \mathbf{e}^i \mathbf{e}^j \ldots \frac{\partial \mathbf{e}^k}{\partial x^h} \} \,.
\end{aligned}$$

Etter det vi har funne i likn.(6.71), så har vi

$$\begin{aligned}
\frac{\partial \mathbf{e}_a}{\partial x^h} &= \Gamma^s_{ha} \, \mathbf{e}_s \,, \\
\frac{\partial \mathbf{e}_b}{\partial x^h} &= \Gamma^t_{hb} \, \mathbf{e}_t \,, \\
\frac{\partial \mathbf{e}^r}{\partial x^h} &= -\Gamma^r_{hu} \, \mathbf{e}^u \,, \\
\frac{\partial \mathbf{e}^k}{\partial x^h} &= -\Gamma^k_{hv} \, \mathbf{e}^v \,.
\end{aligned}$$

Vi byter så om summasjonsindeksane s og a, b og t, r og u, k og v og tilsvarande for alle dei andre som ikkje er nemnde. Vi kan då skriva

$$\begin{aligned}
\nabla \mathbf{T} = \{ \frac{\partial T^{ab\ldots c}_{ij\ldots k}}{\partial x^h} & + T^{sb\ldots c}_{ij\ldots k}\Gamma^a_{hs} \\
& + T^{as\ldots c}_{ij\ldots k}\Gamma^b_{hs} \\
\ldots & - T^{ab\ldots c}_{sj\ldots k}\Gamma^s_{hi} \\
\ldots & - T^{ab\ldots c}_{ij\ldots s}\Gamma^s_{hk}\} \mathbf{e}^h \mathbf{e}_a \mathbf{e}_b \ldots \mathbf{e}_c \mathbf{e}^i \mathbf{e}^j \ldots \mathbf{e}^k \,.
\end{aligned} \tag{6.82}$$

Vi ser då at dette verkar slik at kvar øvre indeks w produserer eit ledd av typen

$$\begin{array}{ll}
\qquad\quad\downarrow & \qquad \text{Posisjonen til } w \\
+T^{ab\ldots s\ldots c}_{ij\ldots k}\Gamma^w_{hs} &
\end{array}$$

og kvar nedre indeks q produsere eit ledd av typen

$$\begin{array}{ll}
-T^{ab\ldots c}_{i\ldots s\ldots k}\Gamma^s_{hq} & \\
\qquad\quad\uparrow & \qquad \text{Posisjonen til } q\,.
\end{array}$$

På grunn av forma er det opplagt at $\nabla \mathbf{T}$ er ein tensor av kovariant orden ein meir enn tensoren $\mathbf{T}$.

Lat oss sjå på nokre særtilfelle:

- a) Lat φ vera ein skalar, d.v.s ein tensor av null-te orden.

  Vi har då

$$\nabla \varphi = \frac{\partial \varphi}{\partial x^i}\mathbf{e}^i \,. \tag{6.83}$$

  Altså er $\partial\varphi/\partial x^i$ dei kovariante komponentane til ein vektor som er gradienten til φ (merk: for at ein vektor skal vera ein gradient på eit visst område D krev ein dessutan at line-integralet av denne vektoren skal vera uavhengig av integrasjonsvegen, dette stiller visse krav til kontinuitet av komponentane til vektoren, dette problemet er drøfta i M 112).

- b) $\mathbf{V}$ er ein vektor

$$(\nabla\mathbf{V})^{i}_{k} = \frac{\partial V^i}{\partial x^k} + V^s\Gamma^i_{sk}\,. \tag{6.84}$$

- c) T er ein dyade med representasjonane $T^{ij}, T^{i}_{.j}, T^{.j}_{i}$ eller T_{ij}. Vi har då

$$(\nabla T)^{.ij}_{k} = \frac{\partial T^{ij}}{\partial x^k} + T^{sj}\Gamma^i_{sk} + T^{is}\Gamma^j_{sk}\,, \tag{6.85}$$

$$(\nabla T)^{.i}_{k.j} = \frac{\partial T^{i}_{.j}}{\partial x^k} + T^{s}_{.j}\Gamma^i_{sk} - T^{i}_{.s}\Gamma^s_{jk}\,, \tag{6.86}$$

$$(\nabla T)^{..i}_{kj} = \frac{\partial T^{.i}_{j}}{\partial x^k} + T^{.s}_{j}\Gamma^i_{sk} - T^{.i}_{s}\Gamma^s_{jk}\,, \tag{6.87}$$

$$(\nabla T)_{kij} = \frac{\partial T_{ij}}{\partial x^k} - T_{sj}\Gamma^s_{ik} - T_{is}\Gamma^s_{jk}\,. \tag{6.88}$$

6.4.3 Komma notasjonen

Ein lettare måte å skriva derivert på er ved bruk av komma notasjonen. Vi skal innføra følgjande konvensjon

$$(\nabla\mathbf{T})_{kij} \stackrel{\text{def}}{=} T_{ij,k} = \frac{\partial T_{ij}}{\partial x^k} - \Gamma^s_{ik}T_{sj} - \Gamma^s_{jk}T_{is}\,. \tag{6.89}$$

Denne siste skrivemåten ville vera meir logisk dersom ein multipliserte inn basisvektoren assosiert med gradientoperatoren bakanfrå i staden for frammanfrå slik som vi har gjort. I praksis vil ein som regel kontrahera den indeksen som er knytt til derivasjonen mot ein annan kontravariant indeks og då fell dette problemet bort.
Ut frå dette kan vi skriva opp den ålmenne kovariante derivasjonsregelen,

Definisjon 6.9

$$A^{n_1\ldots n_s}_{m_1\ldots m_p,k} \overset{\text{def}}{=} \frac{\partial A^{n_1\ldots n_s}_{m_1\ldots m_p}}{\partial x^k} + \sum_{\alpha=1}^{s} \Gamma^{n_\alpha}_{rk}\, A^{n_1\ldots n_{\alpha-1}\, r\, n_{\alpha+1}\ldots n_s}_{m_1\ldots m_p}$$

$$- \sum_{\beta=1}^{p} \Gamma^{\ r}_{m_\beta\, k}\, A^{n_1\ldots n_s}_{m_1\ldots m_{\beta-1}\, r\, m_{\beta+1}\ldots m_p} . \quad (6.90)$$

Elementa i denne tensoren er den kovariante deriverte av tensoren med element

$$A^{n_1\ldots n_s}_{m_1\ldots m_p} . \quad (6.91)$$

Det let seg no lett visa at den kovariante deriverte av ein tensor, som er ytreproduktet av to tensorar, er gjeven ved den "vanlege" produktregelen for derivasjon

$$(A_{ij}B^k)_{,m} = A_{ij,m}B^k + A_{ij}B^k_{.,m} . \quad (6.92)$$

Sidan indreproduktet er resultatet av kontraksjon av eit ytreprodukt, så er det klårt at regelen også gjeld for indreprodukt. Tensorane g_{ij}, g^{ij} og $g^i_{.j}$ er konstante med omsyn på kovariant derivasjon. Vis det !

6.4.4 Fundamentaltensoren

Vi skal sjå på spesielle eigenskapar til fundamenetal-tensoren, G, som har komponentane g_{ij}. For å gjera det treng vi eit resultat om den deriverte av ein determinant. Lat determinanten ha element a_{rs} og lat determinanten vera gjeven ved $a =| a_{rs} |$, vidare skal vi la kofaktoren til a_{rs} vera A^{rs}, då har vi, når N er dimensjonen:

$$a = \sum_j a_{ij}A^{ij} = \epsilon^{ij\ldots k} a_{i1}a_{j2}\ldots a_{kN} . \quad (6.93)$$

Merk at indeksen i skal veljast som eit fast tal i den første summen (Laplace utvikling). I den siste summen brukar vi summasjonskonvensjonen. Denne summen har $N!$ ledd. Lat elementa a_{rs} vera funksjonar av t.d. x, då har vi

$$
\begin{aligned}
\frac{da}{dx} &= \frac{da_{i1}}{dx}\epsilon^{ij\ldots k}a_{j2}\ldots a_{kN} \\
&+ \frac{da_{j2}}{dx}\epsilon^{ij\ldots k}a_{i1}a_{j+1\,3}\ldots a_{kN} \\
&\vdots \\
&= \frac{da_{i1}}{dx}A^{i1} + \frac{da_{j2}}{dx}A^{j2} + \ldots,
\end{aligned}
$$

eller

$$
\frac{da}{dx} = \frac{da_{ij}}{dx}A^{ij}\,. \tag{6.94}
$$

Den deriverte av ein determinant er summen av dei produkta ein får ved å ta den deriverte av kvart element og multiplisera dette med kofaktoren til elementet.

Lat no g vera determinanten til matrisa med element g_{ij}. Sidan g^{ij} er det tilsvarande elementet i den inverse matrisa (etter definisjonen), så har vi at kofaktoren til g_{ij} er $g\,g^{ij}$ og det medfører at

$$
\begin{aligned}
\frac{\partial g}{\partial x^k} &= \frac{\partial g_{ij}}{\partial x^k}gg^{ij} = (\Gamma_{ik,j} + \Gamma_{jk,i})gg^{ij}\,, \\
&= g(\Gamma^i_{ki} + \Gamma^j_{kj}) = 2g\Gamma^s_{ks}\,.
\end{aligned} \tag{6.95}
$$

Her har vi brukt likn.(6.67) og likn.(6.65). Det følgjer vidare at

$$
\frac{\partial}{\partial x^k}f(g) = 2gf'(g)\Gamma^s_{ks}\,, \tag{6.96}
$$

og spesielt har vi

$$
\frac{\partial\sqrt{g}}{\partial x^k} = \sqrt{g}\Gamma^s_{ks}\,. \tag{6.97}
$$

6.4.5 Divergens

Ved hjelp av resultatet ovanfor finn ein no lett fram til eit uttrykk for divergensen til ein vektor representert med kontravariante komponentar. Formelt definerer vi divergensen til ein vektor som kontraksjonen av gradienten til ein vektor. Vi har då,

$$\begin{aligned}\nabla\cdot\mathbf{V} &= \frac{\partial}{\partial x^i}V^i + V^s\Gamma^i_{si}\,,\\ &= \frac{\partial V^i}{\partial x^i} + V^i\frac{1}{\sqrt{g}}\frac{\partial}{\partial x^i}\sqrt{g}\,,\\ &= \frac{1}{\sqrt{g}}\frac{\partial}{\partial x^i}(\sqrt{g}V^i)\,.\end{aligned} \tag{6.98}$$

Der vi har brukt likn.(6.97). Lat vidare

$$\mathbf{V} = \nabla\varphi = \mathbf{e}^k\frac{\partial\varphi}{\partial x^k} = \mathbf{e}_s g^{ks}\frac{\partial\varphi}{\partial x^k}\,.$$

Vi tek no den kontravariante representasjonen av $\mathbf{V}$, substituerer dette inn i likn.(6.98) og får

$$\nabla\cdot\nabla\varphi = \nabla^2\varphi = \frac{1}{\sqrt{g}}\frac{\partial}{\partial x^k}(\sqrt{g}g^{ik}\frac{\partial\varphi}{\partial x^i})\,. \tag{6.99}$$

Dette er Laplace operatoren i tensornotasjon.

6.4.6 Kvervlinga (curl) til ein vektor

Sidan vektorproduktet eller kryssproduktet av to vektorar er ein operasjon som er knytt til R^3, så let ikkje dette omgrepet seg utan vidare generalisera til R^N der $N > 3$. Ei slik generalisering finst, men det fører for langt å gå inn på det her. Vi skal avgrensa oss til R^3 og skriv

$$\mathbf{V} = V_k\mathbf{e}^k = V_k\nabla x^k\,. \tag{6.100}$$

Vi har då

$$\begin{aligned}
\nabla \times \mathbf{V} &= \nabla V_k \times \nabla x^k + V_k \nabla \times \nabla x^k \\
&= \frac{\partial V_k}{\partial x^j} \nabla x^j \times \nabla x^k = \frac{\partial V_k}{\partial x^j} \mathbf{e}^j \times \mathbf{e}^k \\
&= \frac{\epsilon^{ijk}}{\sqrt{g}} \frac{\partial V_k}{\partial x^j} \mathbf{e}_i \, . \qquad (6.101)
\end{aligned}$$

Det siste steget skal vi visa slik:
Vi dekomponerer $\mathbf{e}_i$ vektorane i ein rettvinkla kartesisk basis og har då

$$\begin{aligned}
E &\equiv [\mathbf{e}_1 \mathbf{e}_2 \mathbf{e}_3] \\
&= \begin{vmatrix} e_{11} & e_{12} & e_{13} \\ e_{21} & e_{22} & e_{23} \\ e_{31} & e_{32} & e_{33} \end{vmatrix} .
\end{aligned}$$

Frå teorien om determinantar har vi $\det A = \det A^T$ og $\det(AB) = \det A \det B$, det følgjer då at

$$\begin{aligned}
E^2 &= \begin{vmatrix} e_{11} & e_{12} & e_{13} \\ e_{21} & e_{22} & e_{23} \\ e_{31} & e_{32} & e_{33} \end{vmatrix} \begin{vmatrix} e_{11} & e_{21} & e_{31} \\ e_{12} & e_{22} & e_{32} \\ e_{13} & e_{23} & e_{33} \end{vmatrix} \\
&= \begin{vmatrix} e_{1i}e_{1i} & e_{1i}e_{2i} & e_{1i}e_{3i} \\ e_{2i}e_{1i} & e_{2i}e_{2i} & e_{2i}e_{3i} \\ e_{3i}e_{1i} & e_{3i}e_{2i} & e_{3i}e_{3i} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \mathbf{e}_1 \cdot \mathbf{e}_1 & \mathbf{e}_1 \cdot \mathbf{e}_2 & \mathbf{e}_1 \cdot \mathbf{e}_3 \\ \mathbf{e}_2 \cdot \mathbf{e}_1 & \mathbf{e}_2 \cdot \mathbf{e}_2 & \mathbf{e}_2 \cdot \mathbf{e}_3 \\ \mathbf{e}_3 \cdot \mathbf{e}_1 & \mathbf{e}_3 \cdot \mathbf{e}_2 & \mathbf{e}_3 \cdot \mathbf{e}_3 \end{vmatrix} \\
&= \begin{vmatrix} g_{11} & g_{12} & g_{13} \\ g_{21} & g_{22} & g_{23} \\ g_{31} & g_{32} & g_{33} \end{vmatrix} = g \, .
\end{aligned}$$

Vi har då

$$E = \sqrt{g} \, . \qquad (6.102)$$

Vi har vidare at

$$\left[\mathbf{e}^1\mathbf{e}^2\mathbf{e}^3\right] = \frac{1}{E} = \frac{1}{\sqrt{g}}\,, \tag{6.103}$$

$$\epsilon^{ijk}\mathbf{e}_i = \mathbf{e}^j \times \mathbf{e}^k\sqrt{g}\,, \tag{6.104}$$

der ϵ^{ijk} er permutasjons symbolet. Skalarmultiplikasjon med $\mathbf{e}^s$, viser lett at likn.(6.104) er rett. Vi har rekna med at $E > 0$.

6.4.7 Derivasjon med omsyn på ein parameter

Ein kan ofte ha ein situasjon der koordinatane er funksjonar av ein parameter, det kan t.d. vera ei romkurve gjeven på parameter form, eller det kan vera posisjonen til eit dynamisk system som funksjon av tida o.s.b. Vi skal sjå på tensoren

$$A^{u_1\ldots u_s}_{v_1\ldots v_p}\,, \tag{6.105}$$

der $x^i = x^i(t)$. Formelt kan vi oppfatta dette som ei kurve i koordinatrommet. Vi definerer no den deriverte av denne tensoren med omsyn på parameteren t som

$$\frac{DA^{u_1\ldots u_s}_{v_1\ldots v_p}}{Dt} = A^{u_1\ldots u_s}_{v_1\ldots v_p,k}\frac{dx^k}{dt}\,. \tag{6.106}$$

Det følgjer av definisjonen at denne deriverte er ein ny tensor av same orden som den vi deriverte. Derivasjon til høgare orden følgjer rett fram ved bruk av definisjonen.

6.4.8 Kovariant derivasjon, oppsummering

1. Den kovariante deriverte av eit produkt av to tensorar følgjer den "vanlege" produktregelen for derivasjon.

2. Permutasjonssymbolet, kroneckerdelta og komponentane i den metriske tensoren, når dei er gjevne ved g_{ij} og g^{ij}, kan sjåast som konstantar under kovariant derivasjon. (Merk! Det er totaliteten som er konstant", ikkje komponentvis.)

3. Operasjonen med kontraksjon og kovariant derivasjon kommuterer. (Dette har vi ikkje vist. Vis det !)

4. Sidan komponentane i fundamentaltensoren eller metrikktensoren, kan sjåast som konstant under kovariant derivasjon, så følgjer det at operasjonen med å lyfta og seinka indeksar kommuterer med kovariant derivasjon. Bruk resultatet under pkt. 2 til å visa det!

6.5 Riemannsk geometri

Lat det vera gjeve eit vilkårleg sett av element som kan ordnast i ein ein-eintydig korrespondanse med dei reelle tala $\{x^1, x^2, \ldots, x^n\}$ og stettar ulikskapen $\mid x^i - a^i \mid < K^i$, der a^i og $K^i > 0$ er gjevne konstanter. Vi seier då at $\{x^i\}$ definerer eit område i det n-dimensjonale rommet R^n. I denne samanhengen talar vi om $(x^1, x^2, \ldots, x^n)$ som eit punkt i dette rommet. Dei objekta ein studerer i dette rommet kan vera høgst ulike ting. Til dømes kan ei relativistisk rom-tid hending representerast som eit punkt i eit firedimensjonalt rom. Konfigurasjonen av eit dynamisk system med n generaliserte koordinatar kan det ofte vera naturleg å sjå på som eit punkt i det n-dimensjonale (konfigurasjons-) rommet.

Til det n-dimensjonale rommet vårt, definert ved punktmengda $\{x^1, x^2, \ldots, x^n\}$, skal vi knyta ei symmetrisk kvadratisk form

$$g_{ij}dx^i dx^j, \quad g_{ij} = g_{ji} \text{ og } g = \det g_{ij} \neq 0 \,. \tag{6.107}$$

Vi skal gå ut frå at $g_{ij} \in C^2$ (tilhøyrer klassen av funksjonar som er to gonger differensierlege). I dette n-dimensjonale rommet vårt skal vi definera lengda langs ei gjeven kurve mellom to punkt ved formelen gjeven i likn.(6.60). Vi kjenner ikkje basisvektorane $\mathbf{e}^i$ og $\mathbf{e}_i$ eksplisitt. Men vi har sett i samband med likn.(6.7) at funksjonane g_{ij} inneheld all informasjon om basisvektorane straks vi bestemmer oss for retningen på ein av dei. Dersom vi går over til nye koordinatar $\bar{x}^i(x^1, x^2, \ldots, x^n)$, så har vi $dx^i = (\partial x^i / \partial \bar{x}^j) d\bar{x}^j$ og

$$g_{ij}dx^i dx^j = g_{ij}\frac{\partial x^i}{\partial \bar{x}^k}\frac{\partial x^j}{\partial \bar{x}^l}d\bar{x}^k d\bar{x}^l = \bar{g}_{kl}d\bar{x}^k d\bar{x}^l \,. \tag{6.108}$$

Med andre ord invarians av line-elementet eller avstand krev at g_{ij} er ein kovariant representasjon av ein tensor av andre orden. Når vi innførde g_{ij} tensoren innleiingsvis knytte vi denne tensoren til basisvektorane. Basisvektorane på den andre sida var avleida av posisjonsvektoren. Vi hadde

$$\mathbf{e}_i = \partial \mathbf{r}/\partial x^i \; og \; \mathbf{e}^i = \nabla x^i \, . \tag{6.109}$$

Vi skal no frigjera oss frå denne samanhengen, og byggjer heretter på den informasjonen som ligg i at fundamentaltensoren eller metrikktensoren g_{ij} er gjeven ved den kvadratiske forma likn.(6.108) og at denne forma definerer kvadratet på line-elementet

$$ds^2 = g_{ij} dx^i dx^j \, . \tag{6.110}$$

Dette er grunnlaget for det ein kallar *Riemannsk geometri*. Det er i utgangspunktet klårt at vi alltid kan velja g_{ij} slik vi før har gjort, slik at den geometrien vi har studert er innkludert i den Riemannske geometrien. Men vi skal også sjå at denne ikkje alltid fell saman med vår tidlegare geometri. Riemannsk geometri er med andre ord eit vidare omgrep som under særlege gjevne vilkår fell saman med vår tidlegare Euklidske geometri. Dette skal vi koma attende til seinare.

6.5.1 Parallell-flytting av vektorar

Vi skal seia at ein vektor $\mathbf{p}$ blir flytta parallelt langs ei kurva $x^i = \varphi^i(t)$ når $d\mathbf{p}/dt = \mathbf{0}$ langs denne kurva. Med $\mathbf{p} = p^k \mathbf{e}_k$, så har vi

$$\begin{aligned}
\frac{d\mathbf{p}}{dt} &= \frac{dp^k}{dt}\mathbf{e}_k + p^k \frac{\partial \mathbf{e}_k}{\partial x^i}\frac{dx^i}{dt} \\
&= \frac{dp^k}{dt}\mathbf{e}_k + p^k \frac{dx^i}{dt}\Gamma^j_{ik}\mathbf{e}_j \\
&= \{\frac{dp^k}{dt} + p^j \frac{dx^i}{dt}\Gamma^k_{ij}\}\mathbf{e}_k \, ,
\end{aligned}$$

eller

$$\frac{dp^k}{dt} + p^j \Gamma^k_{ij} \frac{dx^i}{dt} = 0 \, . \tag{6.111}$$

I Riemannsk geometri innfører vi Christoffelsymbola gjennom definisjonslikningane likn.(6.71) og likn.(6.72). Merk at desse definisjonane refererer berre til g_{ij}. I likn.(6.111) kan vi difor sjå på Γ^k_{ij} og dx^i/dt som gjevne funksjonar av t. Hugs at vi ser på ei gjeven kurve: $x^i = \varphi^i(t)$. Vi har difor at likn.(6.111) definerer eit system av ordinære differensiallikningar for $p^k(t)$. Frå teorien for slike system veit vi at startverdeproblemet for eit slikt system under generelle vilkår har ei eintydig løysing. Altså om vi gjev ein startvektor a^k, slik at $p^k(0) = a^k$, så er $p^k(t)$ eintydig bestemt. Det vil seia at til eit kvart punkt på kurva $x^i = \varphi^i(t)$ får vi tilordna ein vektor $p^k(t)$, og denne vektoren er etter definisjonen ei parallellflytting av vektoren a^k. Vi har at lengda av ein vektor $\mathbf{P}$ og vinkelen mellom to vektorar $\mathbf{P}$ og $\mathbf{Q}$ vil vera konstante under ei parallell flytting av vektorane. Det er lett å sjå at $d\mathbf{P}/dt = 0$ og $d\mathbf{Q}/dt = 0$ medfører at $d/dt(\mathbf{P}\cdot\mathbf{Q}) = 0$ og $d/dt(\mathbf{P}\cdot\mathbf{P}) = 0$, resultatet ovanfor følgjer då av dette.

Viktig merknad:

> I det ålmenne tilfellet vil resultatet av ei parallellflytting av ein vektor frå eit punkt P_0 til eit punkt P_1 vera avhengig av den vegen eller kurva som går frå P_0 til P_1 og som vi integrer langs. Med andre ord kan vi ha den situasjonen at ved parallellflytting av same vektoren frå P_0 til P_1, så vil vi få to ulike vektorar i P_1 etter å ha parallellflytta langs to ulike kurver.

6.5.2 Geodesiske kurver

Lat no s vera bogelengda langs den aktuelle kurva, då har vi

$$ds^2 = g_{ij}dx^i dx^j = g_{ij}\frac{dx^i}{dt}\frac{dx^j}{dt}dt^2 = g_{ij}\dot{x}^i\dot{x}^j ds^2\,, \tag{6.112}$$

der vi har sett parameteren $t = s$ i siste likninga. Av dette følgjer det at

$$g_{ij}\dot{x}^i\dot{x}^j = 1\,. \tag{6.113}$$

Den geometriske tolkinga av dette er at tangent-vektoren med kovariante komponentar $g_{ij}\dot{x}^j$ og kontravariante komponentar $\dot{x}^i$ er ein einingsvektor. Ei kurve som har den eigenskapen at tangent-vektoren $T^i = dx^i/ds$ er parallell med omsyn til kurva, seier vi er ei *geodesisk kurve*. Etter definisjonen har vi då

$$\frac{d^2x^k}{ds^2} + \frac{dx^j}{ds}\frac{dx^i}{ds}\Gamma^k_{ij} = 0\,. \tag{6.114}$$

Vi kan også stilla følgjande spørsmål: Dersom vi tenkjer oss ein familie av kurver som knyter saman punkta P_0 og P_1, kan ein då bestemma ei kurve i denne familien som er slik at avstanden eller bogelengda langs denne kurva har ein ekstremalverdi? Det er lett å visa med utgangspunkt i likn.(6.60) at Euler-Lagrange likningane for det variasjonsproblemet vi får blir

$$\frac{d}{ds}(g_{ij}\dot{x}^i) - \frac{1}{2}\frac{\partial g_{ik}}{\partial x^j}\dot{x}^i\dot{x}^k = 0\,, \tag{6.115}$$

og denne likninga let seg omforma til likn.(6.114). Med andre ord har ei godesisk kurve også den eigenskapen at avstanden mellom to punkt målt langs denne kurva har ein ekstremalverdi (normalt minimum). **Dei geodesiske kurvene** er dei "beinaste" kurvene i eit Riemannsk rom, svarande til rette liner i eit Euklidsk rom.

Geodesiske kurver på kuleflata

Vi startar frå kulekoordinatar:

$$x = r\sin\theta\cos\phi\,, \tag{6.116}$$
$$y = r\sin\theta\sin\phi\,, \tag{6.117}$$
$$z = r\cos\theta\,. \tag{6.118}$$

Lat koordinatane vera

$$x^1 = r\sin\theta\cos\phi\,, \tag{6.119}$$
$$x^2 = r\sin\theta\sin\phi\,, \tag{6.120}$$
$$x^3 = r\cos\theta\,. \tag{6.121}$$

For lineelementet har vi

$$ds^2 = dr^2 + r^2 d\theta^2 + r^2\sin^2\theta\, d\phi^2\,. \tag{6.122}$$

Det fylgjer då at

$$g_{11} = 1\,, \qquad g_{22} = r^2 \quad og \quad g_{33} = r^2\sin^2\theta\,, \tag{6.123}$$

og $g_{ij} = 0$ for $i \neq j$.

Vi brukar likning (6.115) og finn

$$\frac{d}{ds}(g_{ij}\dot{x}^i) - \frac{1}{2}\frac{\partial g_{ik}}{\partial x^j}\dot{x}^i\dot{x}^k = 0\,. \tag{6.124}$$

På kuleflata er r konstant og vi har kuleflata parametrisert ved to variable: $\bar{x}^2 = \theta$ og $\bar{x}^3 = \phi$. Frå likn. (6.124) finn vi då

$$\frac{d}{ds}(\bar{g}_{22}\dot{\bar{x}}^2) - \frac{1}{2}\left\{\frac{\partial \bar{g}_{22}}{\partial \bar{x}^2}\dot{\bar{x}}^2\dot{\bar{x}}^2 + \frac{\partial \bar{g}_{33}}{\partial \bar{x}^2}\dot{\bar{x}}^3\dot{\bar{x}}^3\right\} = 0\,. \tag{6.125}$$

$$\frac{d}{ds}(\bar{g}_{33}\dot{\bar{x}}^3) - \frac{1}{2}\left\{\frac{\partial \bar{g}_{22}}{\partial \bar{x}^3}\dot{\bar{x}}^2\dot{\bar{x}}^2 + \frac{\partial \bar{g}_{33}}{\partial \bar{x}^3}\dot{\bar{x}}^3\dot{\bar{x}}^3\right\} = 0\,. \tag{6.126}$$

Vi ser no på kurvene $\bar{x}3 = \phi = konstant$, altså $\dot{\bar{x}}^3 = 0$. Då vi har $\frac{\partial \bar{g}_{22}}{\partial \bar{x}^3} = 0$ ser vi at likn. (6.126) er stetta og for likn. (6.125) har vi

$$\frac{d}{ds}(r^2\frac{d\theta}{ds}) - \frac{1}{2}\left\{\frac{\partial \bar{g}_{22}}{\partial \theta}(\frac{d\theta}{ds})^2 + \frac{\partial \bar{g}_{33}}{\partial \theta}(\frac{d\phi}{ds})^2\right\} = 0\,. \tag{6.127}$$

Sidan $\frac{\partial \bar{g}_{22}}{\partial \theta} = 0$ og $ds = rd\theta$ følgjer det at $\frac{d\theta}{ds} = \frac{1}{r}$ som syner at likn. (6.127) også er stetta. Det viser at desse kurvene er geodesiske kurver.

6.5.3 Geodesiske koordinatar

Ein kan visa at det alltid let seg gjera å velja ein koordinat transformasjon slik at Christoffel symbola er null i eit utvalt punkt. Til dømes kan ein velja

$$\bar{x}^i = x^i - x^i(0) + \frac{1}{2}\Gamma^i_{nm}(0)(x^m - x^m(0))(x^n - x^n(0))\,, \tag{6.128}$$

der argumentet (0) viser til at vedkomande storleik er evaluert i punktet P_0. Ved derivasjon av likn.(6.128) finn ein

$$\delta^i_j = \frac{\partial x^i}{\partial \bar{x}^j} + \Gamma^i_{nm}(0)\frac{\partial x^m}{\partial \bar{x}^j}(x^n - x^n(0))\,. \tag{6.129}$$

I P_0 får vi då (merk at vi har brukt at $\Gamma^k_{ij} = \Gamma^k_{ji}$)

$$\left(\frac{\partial x^i}{\partial \bar{x}^n}\right)(0) \quad = \quad \delta^i_n\,, \tag{6.130}$$

$$\left(\frac{\partial^2 x^i}{\partial \bar{x}^k \partial \bar{x}^h}\right)(0) \quad = \quad -\Gamma^i_{kh}(0)\,. \tag{6.131}$$

Ein kan vidare visa at Christoffelsymbola av 1. og 2. slag transformerer som:

$$\bar{\Gamma}_{lm,n} = \Gamma ij,k \frac{\partial x^i}{\partial \bar{x}^l} \frac{\partial x^j}{\partial \bar{x}^m} \frac{\partial x^k}{\partial \bar{x}^n} + g_{ij} \frac{\partial x^i}{\partial \bar{x}^n} \frac{\partial^2 x^j}{\partial \bar{x}^l \partial \bar{x}^m}, \tag{6.132}$$

$$\bar{\Gamma}^n_{lm} = \Gamma^k_{ij} \frac{\partial \bar{x}^n}{\partial x^k} \frac{\partial x^i}{\partial \bar{x}^l} \frac{\partial x^j}{\partial \bar{x}^m} + \frac{\partial \bar{x}^n}{\partial x^j} \frac{\partial^2 x^j}{\partial \bar{x}^l \partial \bar{x}^m}. \tag{6.133}$$

Desse relasjonane viser også at Christoffelsymbola ikkje representerer tensorar.
Frå likningane likn.(6.130), (6.131) og (6.133) finn vi no

$$\bar{\Gamma}^n_{lm}(0) = \Gamma^k_{ij}(0) \frac{\partial \bar{x}^n}{\partial x^k} \delta^i_l \delta^j_m - \frac{\partial \bar{x}^n}{\partial x^j} \Gamma^j_{lm}(0) = 0. \tag{6.134}$$

Dette resultatet viser at det eksisterer eit koordinatsystem som kan veljast slik at Christoffelsymbola er null i eit vilkårleg valt punkt[2]. Dette punktet skal vi kalla *polen* for transformasjonen, og koordinatsystemet kallar vi geodesiske koordinatar med omsyn på punktet. Den transformasjonen som er brukt er ikkje den einaste transformasjonen, men den har den eigenskapen at *polen* er plassert i origo for koordinatsystemet. Med utgangspunkt i dette resultatet kan ein på annan måte visa reglane for kovariant derivasjon, som vi har omtalt tidlegare.

6.5.4 Krummingstensoren

Likninga for parallell flytting av ein vektor, likn.(6.111) kan i særskilte tilfelle oppfyllast uavhengig av kurvevalet mellom P_0 og P.
Dette er tilfelle dersom p^k kan skrivast som ein implisitt funksjon av t gjennom $x^i(t)$ for ei vilkårleg vald kurve, for då har vi

$$\frac{dp^k}{dt} = \frac{\partial p^k}{\partial x^i} \frac{dx^i}{dt}, \tag{6.135}$$

og den ordinære differensiallikninga likn.(6.111) kan skrivast om til ei partiell differensiallikning

$$\frac{\partial p^k}{\partial x^i} + p^j \Gamma^k_{ij} = 0, \tag{6.136}$$

[2]Sidan desse symbola ikkje er null over alt, viser dette også at Christoffelsymbola ikkje kan vera tensorar.

eller

$$\nabla \mathbf{p} = \mathbf{0}\,. \tag{6.137}$$

Dersom metrikktensoren vår er slik at dette let seg gjera, seier vi at rommet vårt er *flatt*.

Vi skal sjå litt på vilkåra for at rommet er *flatt* og kva eit flatt rom betyr. Frå resultatet ovanfor ser vi at eit flatt rom inneheld vektorar $\mathbf{p}$ slik at

$$\nabla \mathbf{p} = \mathbf{0} \text{ eller } \mathbf{e}^i \frac{\partial}{\partial x^i}(\mathbf{e}^j p_j) = \mathbf{0}\,. \tag{6.138}$$

Dette medfører at

$$\frac{\partial}{\partial x^i}\mathbf{p} = \mathbf{0}\,, \tag{6.139}$$

og sidan

$$p_k = \mathbf{p} \cdot \mathbf{e}_k\,, \tag{6.140}$$

har vi

$$\frac{\partial p_k}{\partial x^i} = \mathbf{p} \cdot \frac{\partial \mathbf{e}_k}{\partial x^i}\,. \tag{6.141}$$

Vi har med andre ord at dei n funksjonane $\mathbf{p} \cdot \frac{\partial \mathbf{e}_k}{\partial x^i}$ $(k = 1, 2, \ldots, n)$ er komponentane i ein gradient-vektor.

Ein kan no visa følgjande teorem:

Ein vektor $\mathbf{v}$ som er kontinuerleg differensierleg (komponentane har kont. deriverte) i eit område R, er ein gradient-vektor $\mathbf{v} = \nabla\varphi$ eller $v_i = \frac{\partial \varphi}{\partial x^i}$ dersom og berre dersom

$$p_{ij} \equiv \frac{\partial}{\partial x^i} v_j - \frac{\partial}{\partial x^j} v_i = 0\,. \tag{6.142}$$

Merknad: Det er lett å visa at p_{ij} er den kovariante representasjonen av ein 2. ordens tensor (Stokes tensor).

a) Dersom $\mathbf{v}$ er ein gradient-vektor har vi $p_{ij} = 0$. Dette følgjer av at $\mathbf{v}$ er ein kontinuerleg differensierleg vektor i R som medfører kontinuerleg 2. deriverte av φ.

b) Dersom $p_{ij} = 0$ eksisterer det ein skalarfunksjon φ slik at $\mathbf{v} = \nabla\varphi$.

Dette viser vi slik: Lat oss velja φ eksplisitt som

$$\begin{aligned}\varphi &= \int_{a^1}^{x^1} v_1(x^1, x^2, \ldots, x^n) dx^1 \\ &+ \int_{a^2}^{x^2} v_2(a^1, x^2, \ldots, x^n) dx^2 \\ &+ \int_{a^3}^{x^3} v_3(a^1, a^2, x^3, \ldots, x^n) dx^3 \\ &\vdots \\ &+ \int_{a^n}^{x^n} v_n(a^1, a^2, \ldots, a^{n-1}, x^n) dx^n \,.\end{aligned}$$

Ein ser då at $\mathbf{v} = \nabla\varphi$, ved å bruka $p_{ij} = 0$ i dei integrala ein får fram etter å ha derivert.
Vis at $v_3 = \frac{\partial\varphi}{\partial x^3}$!
Vi brukar dette i resultatet vi fann ovanfor. Nemleg at

$$\mathbf{p} \cdot \frac{\partial \mathbf{e}_n}{\partial x^i} \,, \tag{6.143}$$

er komponentane i ein gradient vektor. Det medfører at

$$\frac{\partial}{\partial x^j}\left(\mathbf{p} \cdot \frac{\partial \mathbf{e}_n}{\partial x^i}\right) - \frac{\partial}{\partial x^i}\left(\mathbf{p} \cdot \frac{\partial \mathbf{e}_n}{\partial x^j}\right) = 0 \,, \tag{6.144}$$

eller sidan $\frac{\partial \mathbf{p}}{\partial x^i} = 0$ har vi

$$\mathbf{p} \cdot \left(\frac{\partial^2 \mathbf{e}_n}{\partial x^j \partial x^i} - \frac{\partial^2 \mathbf{e}_n}{\partial x^i \partial x^j}\right) = 0 \,. \tag{6.145}$$

Då desse likningane må vera uavhengige av dei initialkrava $\mathbf{p}$ stettar, så kan vi sjå på $\mathbf{p}$ som ein vilkårleg vektor og vi må ha

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial x^i \partial x^j} - \frac{\partial^2}{\partial x^j \partial x^i}\right)\mathbf{e}_n = 0\,. \tag{6.146}$$

Vi ser på operatoren

$$D_{ij} \equiv \frac{\partial^2}{\partial x^i \partial x^j} - \frac{\partial^2}{\partial x^j \partial x^i}\,, \tag{6.147}$$

og merkar oss at denne operatoren transformerer som ein kovariant 2. ordens tensor

$$\bar{D}_{ij} = \frac{\partial^2}{\partial \bar{x}^i \partial \bar{x}^i} - \frac{\partial^2}{\partial \bar{x}^j \partial \bar{x}^i} = \frac{\partial x^k}{\partial \bar{x}^i}\frac{\partial x^l}{\partial \bar{x}^j} D_{kl}\,. \tag{6.148}$$

Vis dette !

Vidare har vi

$$\bar{D}_{ij}\bar{\mathbf{e}}_n = \frac{\partial x^a}{\partial \bar{x}^i}\frac{\partial x^b}{\partial \bar{x}^j}\frac{\partial x^c}{\partial \bar{x}^n} D_{ab}\mathbf{e}_c\,. \tag{6.149}$$

Til slutt følgjer det at

$$\bar{\mathbf{e}}^h \cdot \bar{D}_{ij}\bar{\mathbf{e}}_k = \frac{\partial x^a}{\partial \bar{x}^i}\frac{\partial x^b}{\partial \bar{x}^j}\frac{\partial x^c}{\partial \bar{x}^k}\frac{\partial \bar{x}^h}{\partial x^d}\mathbf{e}^d \cdot D_{ab}\mathbf{e}_c\,. \tag{6.150}$$

Altså er $\mathbf{e}^h \cdot D_{ij}\mathbf{e}_k$ komponentane i ein absolutt blanda tensor av orden fire.

Denne tensoren med komponentane

$$R_{ijk}{}^{h} \equiv \mathbf{e}^h \cdot D_{ij}\mathbf{e}_k\,, \tag{6.151}$$

skal vi definera som *krummingstensoren*. Rommet vårt er difor flatt dersom denne tensoren er null- tensoren.

6.5.5 Eit flatt (Euklidsk) rom

Når rommet er flatt kan vi velja eit set av n lineært uavhengige vektorar $\mathbf{a}_i$ i eit punkt p. Ved å parallellflytta desse vektorane til kring liggjande punkt i R^n, kan vi definera eit sett av konstante basisvektorar $\bar{\mathbf{e}}_i \equiv \mathbf{a}_i$, i eit område rundt p. For desse basisvektorane har vi

$$\bar{g}_{ij} = \mathbf{a}_i \cdot \mathbf{a}_j = \text{konstant}\,. \tag{6.152}$$

Det tilsvarande koordinatsystemet $\bar{x}_i$, kallar vi eit kartesisk koordinatsystem. Til å bestemma dei kartesiske koordinatane $\mathbf{y} = \mathbf{y}(\mathbf{x})$ svarande til dei konstante basisvektorane $\mathbf{a}_i$, har vi frå likn. (6.14)

$$\mathbf{e}_k = \frac{\partial y^r}{\partial x^k}\mathbf{a}_r\,. \tag{6.153}$$

Av denne likninga følgjer det at

$$\frac{\partial \mathbf{e}_k}{\partial x^j} = \frac{\partial^2 y^r}{\partial x^j \partial x^k}\mathbf{a}_r, \tag{6.154}$$

$$\mathbf{a}^s = \frac{\partial y^s}{\partial x^r}\mathbf{e}^r\,. \tag{6.155}$$

Tek vi indreproduktet mellom dei to siste likningane, finn vi

$$\frac{\partial y^s}{\partial x^r}\Gamma^r_{kj} = \frac{\partial^2 y^s}{\partial x^j \partial x^k}\,, \tag{6.156}$$

der vi har brukt likn.(6.63). Vidare har vi at

$$\frac{\partial^2 \mathbf{e}_k}{\partial x^i \partial x^j} = \frac{\partial^3 y^r}{\partial x^i \partial x^j \partial x^k}\mathbf{a}_r\,. \tag{6.157}$$

Dersom y^r er ein tre gonger differensierleg funksjon, så har vi

$$\frac{\partial^2 \mathbf{e}_k}{\partial x^i \partial x^j} - \frac{\partial^2 \mathbf{e}_k}{\partial x^j \partial x^i} = 0\,, \tag{6.158}$$

eller

$$R_{kij}^{\cdot\cdot\cdot r} = 0\,. \tag{6.159}$$

Frå likn.(6.156) følgjer det at $\Gamma^r_{kj} = \Gamma^r_{jk}$. Ut frå dette kan vi seia at dersom det Riemannske rommet kan representerast med konstante basisvektorar, altså eit Euklidsk rom, så følgjer det at krummingstensoren er null-tensoren.

Omvendt kan ein visa at dersom krummingstensoren (også kalla Riemann-Christoffel tensoren) er null-tensoren, så eksisterer det eit koordinatsystem med konstante basisvektorar som representerer rommet. Vi kan formulera desse resultata i følgjande:

Teorem 6.2 *Eit n-dimensjonalt Riemannsk rom, definert ved den metriske tensoren* g_{ij}, $\mid g_{ij} \mid \neq 0$ *og* $g_{ij} = g_{ji}$, *er eit Euklidsk rom dersom og berre dersom Riemann-Christoffel tensoren* $R_{kij}^{\cdot\cdot\cdot r}$ *er null-tensoren.*

Ein kan visa at kovariant derivasjon til andre orden kommuterer, ($A_{i,jk} = A_{i,kj}$), dersom og berre dersom $R_{ijk}^{\cdot\cdot\cdot r} = 0$.
Den representasjonen for Riemann-Christoffel tensoren vi har vald er ein blanda tensor av fjerde orden. Det er også vanleg å skriva denne tensoren i kovariant representasjon på vanleg måte ved

$$R_{kijl} = g_{lr} R_{kij}^{\cdot\cdot\cdot r} \,. \tag{6.160}$$

Ein finn også i litteraturen at den siste indeksen kan vera plassert først, så ein må vera varsam med å bruka ferdige formlar utan å vita presist kva dei står for.

Oppgåver:

1. Lat $\mathbf{e}_i \cdot \mathbf{e}_j = g_{ij}$ og $\mathbf{e}^k \cdot \mathbf{e}^l = g^{kl}$ der $\{\mathbf{e}_i\}$ og $\{\mathbf{e}^j\}$ er resiproke sett. Vis då at

$$g_{ik} g^{kl} = \delta_i^l$$

2. Lat a_i^j vera element (ij) i ein determinant. Vis då at for tre dimensjonar har ein

$$\det\ a_i^j = \begin{cases} \epsilon_{ijk} a_1^i a_2^j a_3^k \\ \epsilon^{ijk} a_i^1 a_j^2 a_k^3 \end{cases} .$$

3. Lat A^j_r vera kofaktoren til element a^j_r i determinanten med element a^k_i . Vis at

$$a^r_i A^j_r = a^j_r A^r_i = a\delta^j_i$$

der $a = \det\ a^k_i$ og gjev ei tolking av dette resultatet.

4. Lat $\bar{\mathbf{e}}_i$ og $\bar{\mathbf{e}}^j$ vera nye basisvektorar slik at

$$\begin{aligned} \bar{\mathbf{e}}_i &= c^j_i \mathbf{e}_j \\ \bar{\mathbf{e}}^i &= \gamma^i_j \mathbf{e}^j \end{aligned}$$

der $c^r_i \gamma^j_r = \delta^j_i$. Vis ut frå dette at $\{\bar{\mathbf{e}}^i\}$ og $\{\bar{\mathbf{e}}_i\}$ må vera resiproke sett.

5. Lat $\mathbf{u}$ og $\mathbf{v}$ vera to vektorar. Vis at $\bar{u}_i \bar{v}^i = u_j v^j$. Gje ei tolking av resultatet.

6. Vis at

$$g = \det\ g_{ij} = \det(\mathbf{e}_i \cdot \mathbf{e}_j) = [\mathbf{e}_1\mathbf{e}_2\mathbf{e}_3]^2 \equiv E^2$$

og at

$$\det\ g^{ij} = E^{-2} = \frac{1}{g}.$$

<u>Vink</u>: Vis først at

$$[\mathbf{uvw}] = E^{-1} \begin{vmatrix} u_1 & u_2 & u_3 \\ v_1 & v_2 & v_3 \\ w_1 & w_2 & w_3 \end{vmatrix} = E \begin{vmatrix} u^1 & u^2 & u^3 \\ v^1 & v^2 & v^3 \\ w^1 & w^2 & w^3 \end{vmatrix},$$

der ein har gått ut frå ein basis $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3$, og den resiproke basisen. Ut frå dette resultatet viser ein lett at

$$[\mathbf{uvw}]\,[\mathbf{abc}] = \begin{vmatrix} \mathbf{u}\cdot\mathbf{a} & \mathbf{u}\cdot\mathbf{b} & \mathbf{u}\cdot\mathbf{c} \\ \mathbf{v}\cdot\mathbf{a} & \mathbf{v}\cdot\mathbf{b} & \mathbf{v}\cdot\mathbf{c} \\ \mathbf{w}\cdot\mathbf{a} & \mathbf{w}\cdot\mathbf{b} & \mathbf{w}\cdot\mathbf{c} \end{vmatrix},$$

der $\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}$, er eit vilkårleg ikkjekoplanart sett.

7. Vis at g_{ij} og g^{ij} slik dei er definerte i oppgåve 6 er tensorar.

8. Vis at ein tensor T^{ij} kan representerast på følgjande måte

$$T^{ij} = g^{ir} g^{js} T_{rs}.$$

9. Lat ein partikkel ha koordinatane $x^1 = x,\ x^2 = y,\ x^3 = z.$

   (a) Vis at farten og akselerasjonen kan uttrykkjast som

   $$v^k = \dot{x}^k \quad \text{og} \quad a^k = \ddot{x}^k + \dot{x}^i \dot{x}^j \Gamma^k_{ij}$$

   og at desse likningane gjeld i alle koordinatsystem.

   (b) Finn eit uttrykk for storleiken på farten og akselerasjonen i retningen $\mathbf{e}_1$.

   (c) Rekn ut uttrykket for v^k og a^k eksplisitt i dei to tilfella når koordinatane er valde som (i) sylinderkoordinatar og (ii) kulekoordinatar.

10. Vis at:

   (a) Gradienten til ein skalar φ kan skrivast som

   $$\nabla\varphi = \mathbf{e}^i \frac{\partial\varphi}{\partial x^i} = \mathbf{e}_j g^{ij} \frac{\partial\varphi}{\partial x^i} = \frac{1}{g} \frac{\partial\varphi}{\partial x^i} G^{ij} \mathbf{e}_j \,,$$

   der G tensoren er gjeven som

   $$G \equiv g_{jk} \mathbf{e}^j \mathbf{e}^k = \mathbf{e}_k \mathbf{e}^k,$$

   og G^{ij} er kofaktoren til g_{ij} .

   (b) Divergensen til ein vektor $\mathbf{v}$ kan skrivast som

$$\nabla \cdot \mathbf{v} = \frac{1}{\sqrt{g}} \frac{\partial}{\partial x^i} (\sqrt{g} v^i) \qquad (6.161)$$

$$= \frac{1}{\sqrt{g}} \frac{\partial}{\partial x^i} (\sqrt{g} g^{ij} v_j) \qquad (6.162)$$

$$= \frac{1}{\sqrt{g}} \frac{\partial}{\partial x^i} (\frac{v_j}{\sqrt{g}} G^{ij}) \,. \qquad (6.163)$$

11. Vis at permutasjonssymbolet ϵ^{ijk} er ein kontravariant tensor av orden 3 og vekt 1, og at ϵ_{ijk} er ein kovariant tensor av orden 3 og vekt -1 .

12. Med utgangspunkt i den vanlege Stokes sats skal ein visa den generaliserte satsen. Vink: Sjå på tilfelle der:

    (a) $\mathbf{v} = f\mathbf{a}$ der f er eit skalar felt og $\mathbf{a}$ ein konstant vektor.

    (b) $\mathbf{v} = \mathbf{a} \times \mathbf{f}$ der $\mathbf{a}$ er konstant og $\mathbf{f}$ eit vektorfelt.

13. Lat ein vektor $\mathbf{v} = f\mathbf{a}$ der $\mathbf{a}$ er ein konstant vektor og f er eit skalarfelt, vis at

$$\int_S f\mathbf{d}\sigma = \int_V \nabla f d\tau \, .$$

    Med utgangspunkt i dette resultatet skal ein visa Gauss sin generaliserte sats. Vi går ut frå at rommet er Euklidsk.

Tillegg A

Andregradsflater

A.1 Ulike flatetypar

Ei andregradsflate er definert ved likninga

$$f(x_1, x_2, x_3) = \sum_{i,j=1}^{3} a_{ij} x_i x_j + \sum_{i=1}^{3} 2 b_i x_i + C = 0 \tag{A.1}$$

der minst ein av a_{ij} er ulik null. Ein kan alltid skriva dette som ei symmetrisk from $(a_{ij} = a_{ji})$, kvifor ?
Ved å innføra denne symmetriske dyaden Φ og vektoren $\mathbf{b}$, kan vi skriva likn. (A.1) som

$$\mathbf{r} \cdot \Phi \cdot \mathbf{r} + 2\mathbf{b} \cdot \mathbf{r} + C = 0 \tag{A.2}$$

Lat F vera mengda av alle punkt som stettar likn.(A.2). Då har vi at dersom

$$\mathbf{r} = \mathbf{s} + (\mathbf{r} - \mathbf{s}) \in \ F \Rightarrow \mathbf{r}' = \mathbf{s} - (\mathbf{r} - \mathbf{s}) \in \ F\,,$$

så har flata eit symmetrisentrum.
Ein kan lett visa at $\mathbf{s}$ må stetta likninga

$$4(\mathbf{s} \cdot \Phi + \mathbf{b}) \cdot (\mathbf{s} - \mathbf{r}) = 0 \tag{A.3}$$

Då dette skal gjelda for alle $\mathbf{r}$ på flata, må vi ha

$$\mathbf{s} \cdot \Phi + \mathbf{b} = \mathbf{0}\,. \tag{A.4}$$

Dersom Φ er komplett, så vil likn.(A.4) alltid ha ei løysing og flata har eit symmetrisentrum gjeve ved

$$\mathbf{s} = -\mathbf{b} \cdot \Phi^{-1}. \tag{A.5}$$

Vi går ut frå at flata har eit symmetrisentrum. Då kan vi føra inn nye koordinatar

$$\mathbf{r} = \mathbf{r}' + \mathbf{s}\,.$$

Set vi dette inn i likn.(A.2), finn vi

$$\mathbf{r}' \cdot \Phi \cdot \mathbf{r}' + c' = 0. \tag{A.6}$$

Sidan Φ er symmetrisk, kan vi alltid velja ein koordinat representasjon der vi kan skriva likn(A.2) som (Jfr. teorem **2.20**)

Hovudtype A

$$\lambda_1 x_1^2 + \lambda_2 x_2^2 + \lambda_3 x_3^2 + d = 0\,. \tag{A.7}$$

Dei flatene som har den forma som er gjeven ved likn.(A.7) skal vi kalla hovudtype A.

Vi skal så visa at alle andre andregradsflater høyrer med under neste hovudtype:

Hovudtype B

$$\lambda_2 x_1^2 + \lambda_2 x_2^2 = c x_3 \tag{A.8}$$

Prov:

For alle andregradsflater gjeld det at dei kan skrivast som

$$\lambda_1 x_1^2 + \lambda_2 x_2^2 + \lambda_3 x_3^2 + \mathbf{b} \cdot \mathbf{r} + C = 0$$

Dette er fordi Φ er symmetrisk. Dersom $\lambda_i \neq 0$ for $i = 1, 2, 3$, så har vi hovudtype (A). Vis det ! Vi kan difor avgrensa oss til at minst ein av $\lambda_i = 0$ og minst ein av $\lambda_i \neq 0$. Vi vel $\lambda_3 = 0$ og ved ein høveleg koordinattransformasjon finn ein då

$$\lambda_1 \bar{x}_1^2 + \lambda_2 \bar{x}_2^2 + d\, \bar{x}_3 = 0.$$

Q.E.D.

Vi kan ha ei rekkje med sertilfelle: Lat oss ta dei tilfella der andregradsflata degenererer til den tome mengda, diskrete punkt, rette liner og plan.

type 0: den tome mengda: $x^2 + 3y^2 + 5z^2 = -1$,

type 1: eit punkt: $5x^2 + 3y^2 + 2z^2 = 0$,

type 2: ei rett line (x-aksen): $4y^2 + 5z^2 = 0$,

type 3: eit plan: $4x^2 = 0$,

type 4: to plan: $3x^2 - 5y^2 = 0$.

Vi skal så ta med sylinderflatene der ein av dei variable ikkje er med. Dei er av følgjande typar:

type 6: elliptisk sylinder: $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$,

type 7: hyperbolsk sylinder: $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$,

type 8: parabolsk sylinder: $y^2 = 2px$.

I dei tilfella som er tekne med ovanfor er representasjonen vald slik at det er z-koordinaten som fell bort. Flatene er genererte av ei rett line parallell med z- aksen som følgjer kurva i planet $z = 0$, d.v.s. xy-planet. Ei slik line kallast for ei generatrise.

Dei eigentlege andregradsflatene kan ein dela inn i seks typar:

type 9: Den elliptiske paraboloiden:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = \frac{z}{c}$$

type 10: Den hyperbolske paraboloiden:

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = \frac{z}{c}$$

type 11: Ellipsoiden:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$$

type 12: Den einkappa hyperboloiden:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1$$

type 13: Den tokappa hyperboloiden:

$$-\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$$

type 14: Den elliptiske kjegleflata:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 0$$

Teknikken ein brukar for å få innsyn i korleis desse ulike flatene ligg, er å skjæra dei med høvelege plan og sjå korleis skjæringskurvene med planet vert. Ta som øving å gå gjennom dei ulike typane av andregradsflater for å laga deg eit geometrisk bilete av korleis flatene ser ut.

A.2 Karakterisering av flatepunkt

Vi tek for oss ei vilkårleg flate i R^3 gjeven ved

$$f(\mathbf{r}) = 0 \quad \text{eller} \quad f(x_1, x_2, x_3) = 0,$$

i kartesiske koordinatar. Vi skal studera eit punkt der den andre deriverte av f er kontinuerleg for alle x_i. Frå Taylors formel til andre orden (Apostol (avsn. 9.10, likn. 9.34)) får ein då

$$f(\mathbf{R}) = \Delta\mathbf{r} \cdot \nabla f(\mathbf{r_0}) + \frac{1}{2}\Delta\mathbf{r}\Delta\mathbf{r} : \nabla\nabla f(\mathbf{r_0}) + R_3,$$

der $\mathbf{R} = \mathbf{r}_0 + \Delta\mathbf{r}$. Vi har brukt ein notasjon som ein ofte ser i litteraturen

$$\mathbf{a} \cdot (\mathbf{b} \cdot \Phi) \stackrel{\text{def}}{=} \mathbf{ab} : \Phi.$$

Dessutan har vi at R_3 er restleddet i Taylors formel, og $f(\mathbf{r}_0) = 0$, sidan $\mathbf{r}_0$ er eit punkt i flata. Vidare har vi at

$$\nabla\nabla f(\mathbf{r}_0) \equiv \mathbf{i}_i\mathbf{i}_j \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j} \, |_{\mathbf{r}=\mathbf{r}_0} \, , \tag{A.9}$$

er ein symmetrisk dyade.
Vi krev no at $\Delta\mathbf{r}$ ligg i tangentplanet til flata i punktet $\mathbf{r} = \mathbf{r}_0$, difor har vi

$$\Delta\mathbf{r} \cdot \nabla f(\mathbf{r}_0) = 0,$$

fordi $\nabla f(\mathbf{r}_0)$ er pr. definisjon ein normalvektor til tangentplanet.
Altså

$$f(\mathbf{R}) = f(\mathbf{r}_0 + \Delta\mathbf{r}) = \frac{1}{2}\Delta\mathbf{r}\Delta\mathbf{r} : \nabla\nabla f(\mathbf{r}_0) + R_3. \tag{A.10}$$

Vi set

$$K \equiv \frac{1}{2}\Delta\mathbf{r}\Delta\mathbf{r} : \nabla\nabla f(\mathbf{r}_0). \tag{A.11}$$

Her er K ei symmetrisk kvadratisk form i $\Delta x_i, \Delta x_j$ der

$$\Delta\mathbf{r} = (\Delta x_1, \Delta x_2, \Delta x_3)\,.$$

Før vi går vidare skal vi definera omgrepet definit.

Definisjon A.1 *Lat* $F(\mathbf{x})$ *vera ei kvadratisk form definert over eit område* D. *Lat* $\mathbf{x} \in D$ & $\mathbf{x} \neq \mathbf{0}$ der $\mathbf{x} = (x_1, x_2, ..., x_n)$

1) $F(\mathbf{x})$ er positiv definit dersom $F(\mathbf{x}) > 0.$
2) $F(\mathbf{x})$ er negativ definit dersom $F(\mathbf{x}) < 0.$
3) $F(\mathbf{x})$ er positiv semidefinit dersom $F(\mathbf{x}) \geq 0.$
4) $F(\mathbf{x})$ er negativ semidefinit dersom $F(\mathbf{x}) \leq 0.$
5) $F(\mathbf{x})$ har ingen av eigenskapane under $1-4$ $F(\mathbf{x})$ er indefinit.

Den kvadratiske forma K likn.(A.11) kan klassifiserast etter definisjon **A.1**. Sidan K er symmetrisk kan ein alltid representera den i ein kartesisk basis slik at vi har

$$K = \lambda_1 \Delta x_1^2 + \lambda_2 \Delta x_2^2 + \lambda_3 \Delta x_3^2.$$

Vi ser difor at det som er avgjerande for om K er definit er eigenverda λ_i for den symmetriske dyaden (A.9). Det er likevel eit problem med denne drøftinga, som er knytt til at $\Delta x_1, \Delta x_2$ og Δx_3 ikkje kan veljast fritt. Området D i definisjon **A.1** er i dette høvet tangentplanet, altså eit under område i R^3. Vi kan koma utanom denne vansken ved å innføra ein ny variabel $\Delta\mathbf{u}$ ved

$$\Delta\mathbf{r} = \Delta\mathbf{u} \times \nabla f.$$

Då har vi at $\Delta\mathbf{r}$ ligg i planet loddrett på ∇f (som vi skal ha) og dessutan kan $\Delta\mathbf{u}$ veljast fritt i R^3. Merk at for at Taylors formel skal gje ei brukande tilnærming, så må $|\Delta\mathbf{r}|$ vera liten, og dersom $K \neq 0$, så vil dette leddet i v.s. av likn.(A.10) bestemma forteiknet når $|\Delta\mathbf{r}|$ er liten nok. Den kvadratiske forma (A.11) kan no omskrivast til følgjande uttrykk,

$$\begin{aligned} K &= \frac{1}{2}(\Delta\mathbf{u} \times \nabla f) \cdot \nabla\nabla f(\mathbf{r}_0) \cdot (\Delta\mathbf{u} \times \nabla f) \\ &= -\frac{1}{2}\Delta\mathbf{u} \cdot \nabla f \times \nabla\nabla f \times \nabla f \cdot \Delta\mathbf{u}\,. \end{aligned} \tag{A.12}$$

Der er naturleg å sjå på den symmetriske dyaden

$$\Psi = \nabla f \times \nabla\nabla f \times \nabla f\,. \tag{A.13}$$

Det er opplagt at denne dyaden er planar sidan den har ein invariant retning ∇f med eigenverde lik 0. Vi kan difor velja ein kartesisk basis der vi har

$$\Psi = \alpha_1\mathbf{i}_1\mathbf{i}_1 + \alpha_2\mathbf{i}_2\mathbf{i}_2 \tag{A.14}$$

eller

$$K = -\frac{1}{2}(\Delta u_1^2\alpha_1 + \Delta u_2^2\alpha_2) \tag{A.15}$$

Vi ser på dei ulike tilfella for K:

1. $\alpha_1\alpha_2 > 0 \;\&\; \alpha_1 < 0$ positiv definit,
2. $\alpha_1\alpha_2 > 0 \;\&\; \alpha_1 > 0$ negativ definit,
3. $\alpha_1\alpha_2 = 0 \;\&\; \alpha_1 > 0\,, \quad \alpha_2 = 0$ negativ semidefinit,
4. $\alpha_1\alpha_2 = 0 \;\&\; \alpha_1 < 0\,, \quad \alpha_2 = 0$ positiv semidefinit,
5. $\alpha_1\alpha_2 < 0$ indefinit.

Dei to første tilfella ovanfor gjev eigentleg det same, tangentplanet ligg på eine eller andre sida av flata i ein liten omeign om punktet $\mathbf{r} = \mathbf{r}_0$. Vi har då det vi kalla eit elliptisk flatepunkt. Tilfelle 3) og 4) ovafor (merk at α_1 og α_2 kan byta "rolle" i 3) og 4)) gjev ei semidefinit form, som vil seia at det finst retningar der tangentplanet ligg i flata utan å skjera gjennom ho. Vi har då det vi kallar eit parabolsk flatepunkt. Tilfelle 5 ovafor gjev ei indefinit form og vi har då det vi kallar eit hyberbolsk flatepunkt. Dersom vi har både α_1 og $\alpha_2 = 0$, så må vi gå til høgare orden i Taylor utviklinga for å bestemma kva slag flatepunkt vi har.
Merk også at den andre skalaren til dyaden Ψ , som vi kallar ψ_2 er gjeven ved

$$\psi_2 = \alpha_1\alpha_2 + \alpha_1\alpha_3 + \alpha_2\alpha_3$$

og sidan $\alpha_3 = 0$, har vi

$$\psi_2 = \alpha_1\alpha_2 \tag{A.16}$$

Vi oppsummerer dette i følgjande:

Definisjon A.2 *Med utgangspunkt i likn(A.14) har vi når* $\alpha_1^2 + \alpha_2^2 > 0$ *at flatepunktet er:*

1. elliptisk dersom $\alpha_1\alpha_2 > 0$ K er definit (positiv eller negativ),
2. parabolsk dersom $\alpha_1\alpha_2 = 0$ K er semidefinit,
3. hyperbolsk dersom $\alpha_1\alpha_2 < 0$ K er indefinit.

Vi skal så finna ein måte å klassifisera desse ulike flatetypane ut frå dyaden $\nabla\nabla f$. Lat representasjonen vår vera slik at dyaden $\nabla\nabla f$ er på diagonalform, altså:

$$\nabla\nabla f = \lambda_1\mathbf{i}_1\mathbf{i}_1 + \lambda_2\mathbf{i}_2\mathbf{i}_2 + \lambda_3\mathbf{i}_3\mathbf{i}_3 \tag{A.17}$$

Vi har då

$$\Psi = \nabla f \times \nabla\nabla f \times \nabla f = \Sigma \mathbf{a}_i\mathbf{b}_i$$

der

$$\mathbf{a}_i = \lambda_i \nabla f \times \mathbf{i}_i \quad \text{og} \quad \mathbf{b}_i = \mathbf{i}_i \times \nabla f.$$

Vi finn då den andre dyaden til Ψ.

$$\begin{aligned}\psi_2 &= \frac{1}{2}\Sigma \mathbf{a}_i \times \mathbf{a}_j \cdot \mathbf{b}_i \times \mathbf{b}_j = \frac{1}{2}\Sigma \mid \nabla f \mid^2 [\nabla f \, \mathbf{i}_i \, \mathbf{i}_j]^2 \, \lambda_i \lambda_j \\ &= \frac{1}{2} \mid \nabla f \mid^2 \{(\frac{\partial f}{\partial x_1})^2 \lambda_2 \lambda_3 + (\frac{\partial f}{\partial x_2})^2 \lambda_1 \lambda_3 + (\frac{\partial f}{\partial x_3})^2 \lambda_1 \lambda_2\} \, .\end{aligned}$$

Dersom alle eigenverde λ_i er ulik null kan dette omskrivast, så vi får

$$\psi_2 = \frac{1}{2} \mid \nabla f \mid^2 \lambda_1 \lambda_2 \lambda_3 \nabla f \cdot \nabla\nabla f^{-1} \cdot \nabla f \, . \tag{A.18}$$

Dersom vi har eit eigenverde lik null t.d. $\lambda_3 = 0$, så kan flata skrivast som

$$f(\mathbf{r}) = (x_3 - F(x_1, x_2)) = 0 \, ,$$

og

$$\psi_2 = \frac{1}{2} \mid \nabla f \mid^2 \lambda_1 \lambda_2 \, . \tag{A.19}$$

Slik at forteiknet til ψ_2 er bestemt av forteiknet til $\lambda_1 \lambda_2$. Går vi så tilbake til likn(A.16), så ser vi frå likningane (A.18) og (A.19) at dette også bestemmer forteiknet til $\alpha_1 \alpha_2$ og difor typen av flatepunktet.

Oppgåve:

Gå ut frå at vi har ei andregrads flate med sentrum. Bruk resultatet i likn.(A.18) til å bestemma typen av flatepunkt for denne klassen av andregradsflater.

Tillegg B

Riemannsk rom, krummingstensoren

B.1 Flater i R^3

Vi skal starta med å sjå litt nærare på flater i R^3, for å få litt innsikt i kva denne teorien går ut på. Ei flate i R^3 kan ein skriva som $F(x^1, x^2, x^3) = 0$ i det ålmenne tilfellet eller dersom ein kan løysa ut eksplisitt m.o.p. x_3

$$x^3 = f(x^1, x^2)\,. \tag{B.1}$$

Lat (x_0, y_0, z_0) vera eit punkt på denne flata og lat $x^1 = x_0 + x, \quad x^2 = y_0 + y, \quad x^3 = z_0 + z$. Då finn ein ved å Taylorutvikla at

$$\begin{aligned} z &= z_0 + f(a,b) + x\frac{\partial f}{\partial x}|_{(x,y)=(a,b)} + y\frac{\partial f}{\partial y}|_{(x,y)=(a,b)} \\ &\quad + \frac{1}{2}x^2\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}|_{(x,y)=(a,b)} + xy\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}|_{(x,y)=(a,b)} + \frac{1}{2}y^2\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}|_{(x,y)=(a,b)} + \cdots \end{aligned} \tag{B.2}$$

Vi skal studera eigenskapane til flata i eit lite område omkring punktet (x_0, y_0, z_0) slik at $|x|$, $|y|$, $|z|$ er små storleikar. Vidare skal vi gå ut frå at Taylorutviklinga konvergerer slik at dei oppskrivne ledda i likn. (B.2) gjev ein god representasjon av flata i dette området. Resultatet av dette er at ei vilkårleg flate som oppfyller krava ovanfor let seg tilnærma v. h. a. ei 2. gradsflate. Slike 2. gradsflater er studerte i Appendix A. Ein viser der at ein alltid kan velja ein koordinat-representasjon der flata kan uttrykkjast utan produktledd xy.

$$z = Ax^2 + By^2 + \beta_1(x,y)x^2 + \beta_2(x,y)y^2 + \beta_3(x,y)xy\,, \tag{B.3}$$

der vi har valt eit koordinatsystem med origo i P med $z-$ aksen langs flatenormalen [1] og der β_1, β_2, β_3 går mot null når $|x| \to 0$ og $|y| \to 0$.

B.2 Flatekurver

Lat flata vera gjeven ved $F(x,y,z) = 0$ eller på parameterform

$$\begin{aligned} x &= x(u,v)\,, \\ y &= y(u,v)\,, \\ z &= z(u,v)\,. \end{aligned}$$

Vi har at $\mathbf{r}_u \times \mathbf{r}_v$ og ∇F, er alternative måtar å skriva normalvektorar til flata på. Dersom $u = u(w)$ og $v = v(w)$ har vi ei romkurve som ligg i flata, *flatekurve*, på parameterform med parameteren w. Lat k vera ei vilkårleg slik flatekurve som går gjennom punktet P. Lat hovudnormalen $\mathbf{N}$ til denne kurva laga vinkelen θ med flatenormalen $\mathbf{n}$, der $\mathbf{N}$ og $\mathbf{n}$ er einingsvektorar. Vidare er $\mathbf{t}$ einingstangentvetoren til kurva slik at $\mathbf{n}\cdot\mathbf{t} = 0$. Sidan denne relasjonen gjeld i ein omeign om P, kan han deriverast med omsyn på s, der s er bogelengda langs kurva. Ein finn då

$$\frac{d}{ds}(\mathbf{t}\cdot\mathbf{n}) = \mathbf{n}\cdot\frac{d}{ds}\mathbf{t} + \mathbf{t}\cdot\frac{d\mathbf{n}}{ds} = 0\,, \tag{B.4}$$

eller v. h. a. Frenet sin første formel, $\frac{d}{ds}\mathbf{t} = \kappa\mathbf{N}$

$$\kappa\mathbf{n}\cdot\mathbf{N} = -\frac{d\mathbf{n}}{ds}\cdot\mathbf{t}\,, \tag{B.5}$$

der høgresida i denne likninga vil vera den same for alle kurver k som har same tangentvektor i P. Når θ er vinkelen mellom $\mathbf{n}$ og $\mathbf{N}$, så har vi

$$\kappa\cos\theta = -\frac{d\mathbf{n}}{ds}\cdot\mathbf{t} \stackrel{def}{=} \kappa_0\,, \qquad \text{(Meusnier sin setning)}\,. \tag{B.6}$$

der κ er krumminga til romkurva. Vi ser at denne krumminga har sin minste verdi når $\theta = 0$, d. v. s. når hovudnornalen for kurva fell langs flatenormalen

[1] Merk at dette fører til at $\partial f/\partial x$ og $\partial f/\partial y$ båe er null i origo for systemet vårt, slik at dei lineære ledda vert null

i punktet. Om vi skjer flata med eit plan gjennom hovudnormalen og tangentvektoren til kurva, så vil denne skjæringskurva ha krumming κ_0 i P_0. Dette definerer vi som flatekrumminga i retningen $\mathbf{t}$.

B.3 Flatekrumming

Lat oss først sjå på krumminga til ein sirkel.

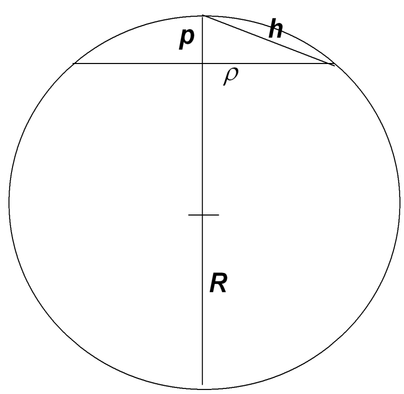

Fig. B1 Krumming av ein sirkel med radius R

Frå figuren ser ein at $\rho^2 = p(2R-p) = 2pR-p^2$ eller $\rho^2+p^2 = h^2 = 2pR$ slik at

$$\frac{2p}{h^2} = \frac{1}{R} = \lim_{p\to 0} \frac{2p}{\rho^2} \stackrel{def}{=} K \tag{B.7}$$

Den siste relasjonen vil vi bruka som definisjon på krumminga K på ei vilkårleg kurve, der p er målt langs hovudnormalen til kurva.

Lat likniga for flata vera gjeven som likn. (B.3)

$$z = Ax^2 + By^2 + \beta_1(x,y)x^2 + \beta_2(x,y)y^2 + \beta_3(x,y)xy\,, \tag{B.8}$$

der β_1, β_2 og β_3 alle går mot null når $x^2+y^2 \to 0$. Vi let z no svara til h i Fig. B1. I Fig. B2 har vi laga ein skisse over eit lokalt område om eit punkt

P_0 på ei flate, der flatenormalen i punktet peikar i $z-$retningen. Figuren syner eit elliptisk punkt, men resultatet vi finn gjeld allment.

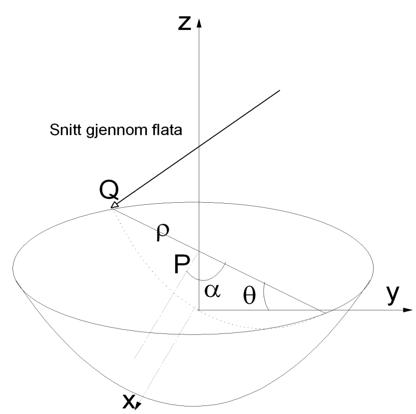

Fig. B2 Krumming av ei flate

Vi set $x = \rho\cos\alpha$ og $y = \rho\sin\alpha$ multipliserer likninga ovanfor med $2/\rho^2$ og går til grensa p og ρ går mot null, elles har vi $\rho = h\cos\theta$ der $\theta \to 0$ i grensa vi ser på. Vi finn

$$k = 2A\cos^2\alpha + 2B\sin^2\alpha = k_1\cos^2\alpha + k_2\sin^2\alpha \tag{B.9}$$

der $k_1 = 2A$ og $k_2 = 2B$ er hovudkrummingane for flata i to snitt som står normalt på kvarandre $\alpha = 0$ og $\alpha = \frac{\pi}{2}$. Totalkrumminga for flata er definert som $K = k_1k_2$. For ei kuleflate med radius R finn ein ut frå Fig. B1 at $k_1 = k_2 = \frac{1}{R}$ og for totalkrumminga finn ein $K = 1/R^2$.

Liouville fann fram til ein formel for totalkrumming av ei flate med utgangspunkt i flata gjeven på parametrisert form:

$$x = x(u,v), \quad y = y(u,v), \text{ og } z = z(u,v)\,. \tag{B.10}$$

Utleiding av denne formelen er nokså omfattande og komplisert, slik at det fell utanfor ramma av dette pensumet. Vi skal difor gje formelen utan utleiding for det tilfellet at parameterkurven $u =$konstant og $v =$konstant skjer kvarandre ortogonalt.

$$K = -\frac{1}{2H}\left\{\frac{\partial}{\partial u}\left(\frac{1}{H}\frac{\partial G}{\partial u}\right) - \frac{\partial}{\partial v}\left(\frac{1}{H}\frac{\partial E}{\partial v}\right)\right\} \tag{B.11}$$

der vi som før har at $E \stackrel{def}{=} \mathbf{r}_u \cdot \mathbf{r}_u$ og $G \stackrel{def}{=} \mathbf{r}_v \cdot \mathbf{r}_v$ og etter føresetnadene er $F \stackrel{def}{=} \mathbf{r}_u \cdot \mathbf{r}_v = 0$. $H \stackrel{def}{=} \sqrt{EG - F^2} = \sqrt{EG}$.

Lat oss sjå på ei kuleflate parametrisert ved

$$\begin{aligned} x &= R\sin\theta\cos\phi\,, \\ y &= R\sin\theta\sin\phi\,, \\ z &= R\cos\theta\,, \end{aligned}$$

der R, radius i kuleflata er ein konstant. Vi finn

$$\begin{aligned} \mathbf{r}_\theta &= R\{\cos\theta\cos\phi, \cos\theta\sin\phi, -\sin\theta\}\,, \\ \mathbf{r}_\phi &= R\{\sin\theta\sin\phi, \sin\theta\cos\phi, 0\}\,, \end{aligned}$$

slik at

$$\begin{aligned} E &\stackrel{def}{=} \mathbf{r}_\theta \cdot \mathbf{r}_\theta = R^2\,, \\ F &\stackrel{def}{=} \mathbf{r}_\theta \cdot \mathbf{r}_\phi = 0\,, \\ G &\stackrel{def}{=} \mathbf{r}_\phi \cdot \mathbf{r}_\phi = R^2\sin^2\theta\,, \\ H &\stackrel{def}{=} \sqrt{EG - F^2} = R^2\sin\theta\,, \end{aligned}$$

slik at med

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial u} &= \frac{\partial}{\partial \theta}\,, \\ \frac{\partial}{\partial v} &= \frac{\partial}{\partial \phi}\,, \end{aligned}$$

finn ein frå likn. (B.11) at

$$K = \frac{1}{R^2}\,. \tag{B.12}$$

Dette er i samsvar med det vi fann som resultat for ei kuleflate etter Eulers formel, likn. (B.9) med $K = k_1 k_2$ der $k_1 = k_2 = \frac{1}{R}$.

B.4 Krummingstensoren

Vi har

$$D_{ij} \stackrel{def}{=} \frac{\partial\partial}{\partial x^i \partial x^j} - \frac{\partial\partial}{\partial x^j \partial x^i} \tag{B.13}$$

og krummingstensoren

$$R_{ijk}^{\cdot\cdot\cdot r}\mathbf{e}_r \stackrel{def}{=} D_{ij}\mathbf{e}_k\,, \tag{B.14}$$

For å skriva denne tensoren uttrykt ved kovariante komponentar finn ein

$$\mathbf{e}_h \cdot D_{ij}\mathbf{e}_k = R_{ijk}^{\cdot\cdot\cdot r}\mathbf{e}_r \cdot \mathbf{e}_h = R_{ijk}^{\cdot\cdot\cdot r} g_{hr} \stackrel{def}{=} R_{ijkh} \tag{B.15}$$

Med utgangspunkt i dette finn ein

$$\begin{aligned}
R_{ijkh} &= \mathbf{e}_h \cdot D_{ij}\mathbf{e}_k \\
&= \mathbf{e}_h \cdot \left\{ \frac{\partial\partial\mathbf{e}_k}{\partial x^i \partial x^j} - \frac{\partial\partial\mathbf{e}_k}{\partial x^j \partial x^i} \right\} \\
&= \mathbf{e}_h \cdot \left\{ \frac{\partial}{\partial x^i}\left(\Gamma^r_{jk}\mathbf{e}_r\right) - \frac{\partial}{\partial x^j}\left(\Gamma^r_{ik}\mathbf{e}_r\right) \right\}
\end{aligned}$$

Frå likn. (6.72) har ein

$$\Gamma^k_{ij} = \Gamma_{ij,s} g^{sk} \quad \Rightarrow \quad \Gamma^k_{ij} g_{kl} = \Gamma_{ij,l} \tag{B.16}$$

Ved å bruka dette finn ein vidare at

$$\begin{aligned}
R_{ijkh} &= \mathbf{e}_h \cdot \left\{ \frac{\partial}{\partial x^i}\left(\Gamma^r_{jk} g_{rm}\mathbf{e}^m\right) - \frac{\partial}{\partial x^j}\left(\Gamma^r_{ik} g_{rm}\mathbf{e}^m\right) \right\} \\
&= \delta^m_h \left\{ \frac{\partial}{\partial x^i}\left(\Gamma^r_{jk} g_{rm}\right) - \frac{\partial}{\partial x^j}\left(\Gamma^r_{ik} g_{rm}\right) \right\} \\
&\qquad -\mathbf{e}_h \cdot \left\{ \left(\Gamma^r_{jk} g_{rm}\Gamma^m_{is}\mathbf{e}^s\right) - \left(\Gamma^r_{ik} g_{rm}\Gamma^m_{js}\mathbf{e}^s\right) \right\} \\
&= \frac{\partial}{\partial x^i}\left(\Gamma^r_{jk} g_{rh}\right) - \frac{\partial}{\partial x^j}\left(\Gamma^r_{ik} g_{rh}\right) - \Gamma^r_{jk} g_{rm}\Gamma^m_{ih} + \Gamma^r_{ik} g_{rm}\Gamma^m_{jh} \\
&= \frac{\partial}{\partial x^i}\left(\Gamma^r_{jk} g_{rh}\right) - \frac{\partial}{\partial x^j}\left(\Gamma^r_{ik} g_{rh}\right) + \Gamma_{ik,m}\Gamma^m_{jh} - \Gamma_{jk,m}\Gamma^m_{ih}
\end{aligned}$$

eller

$$R_{ijkh} = \frac{\partial}{\partial x^i}\left(\Gamma^r_{jk} g_{rh}\right) - \frac{\partial}{\partial x^j}\left(\Gamma^r_{ik} g_{rh}\right) + \Gamma_{ik,m}\Gamma^m_{jh} - \Gamma_{jk,m}\Gamma^m_{ih} \tag{B.17}$$

No har vi også

$$\Gamma_{jk,m}\Gamma^m_{ih} = \Gamma^m_{jk} g_{ms}\Gamma^s_{ih} = \Gamma^m_{jk}\Gamma_{ih,m} \tag{B.18}$$

Ved å bruka dette finn ein den alternative forma

$$R_{ijkh} = \frac{\partial}{\partial x^i}\left(\Gamma^r_{jk} g_{rh}\right) - \frac{\partial}{\partial x^j}\left(\Gamma^r_{ik} g_{rh}\right) + \Gamma_{jh,m}\Gamma^m_{ik} - \Gamma_{ih,m}\Gamma^m_{jk} \tag{B.19}$$

Ein kan vidare syna at Riemann-Christoffel tensoren har desse symmetrieigenskapane

$$\begin{aligned} R_{ijkh} &= -R_{jikh} \\ R_{ijkh} &= -R_{ijhk} \\ R_{ijkh} + R_{jkih} + R_{kijh} &= 0 \\ R_{ijkh} &= R_{khij} \end{aligned}$$

Vi skal no sjå på eit enkelt tilfelle med eit to dimensjonalt rom og følgjande tensorprodukt med kontraksjon over to indeksar:

$$\epsilon^{ij}\epsilon^{kh}R_{ijkh} = R + R_{1212} + (-1)\cdot R_{2112} + (-1)\cdot R_{1221} + (-1)^2\cdot R_{2121} = 4R_{1212} \tag{B.20}$$

Sidan ϵ^{ij} og ϵ^{kh} er relative tensorar (skalar) med vekt 1 kvar av dei, så er resultatet ovanfor ein relativ tensor (skalar) med vekt 2. No er $g = \det(g_{ij})$ ein relativ tensor (skalar) med vekt 2 slik at R_{1212}/g er ein absolutt skalar. Frå likn. (B.17) finn ein med $i = 1,\ j = 2,\ k = 1,\ h = 2\,.$

$$\begin{aligned} R_{1212} &= \frac{\partial}{\partial x^1}\left(\Gamma^r_{21} g_{r2}\right) - \frac{\partial}{\partial x^2}\left(\Gamma^r_{11} g_{r2}\right) + \Gamma_{11,m}\Gamma^m_{22} - \Gamma_{21,m}\Gamma^m_{12} && \text{(B.21)} \\ &= \frac{\partial}{\partial x^1}\left(\Gamma_{21,2}\right) - \frac{\partial}{\partial x^2}\left(\Gamma_{11,2}\right) + \Gamma_{11,m}\Gamma^m_{22} - \Gamma_{21,m}\Gamma^m_{12} && \text{(B.22)} \end{aligned}$$

Frå likn. (6.71) finn ein

$$\begin{aligned} \Gamma_{11,1} &= \frac{1}{2}\frac{\partial g_{11}}{\partial x_1}\,, \\ \Gamma_{12,1} &= \frac{1}{2}\frac{\partial g_{11}}{\partial x_2}\,, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\Gamma_{22,1} &= -\frac{1}{2}\frac{\partial g_{22}}{\partial x_1}\,,\\
\Gamma_{11,2} &= -\frac{1}{2}\frac{\partial g_{11}}{\partial x_2}\,,\\
\Gamma_{12,2} &= \frac{1}{2}\frac{\partial g_{22}}{\partial x_1}\,,\\
\Gamma_{22,2} &= \frac{1}{2}\frac{\partial g_{22}}{\partial x_2}\,.
\end{aligned}$$

Vidare er $g = g_{11}g_{22}$, $g^{11} = \frac{1}{g_{11}}$ og $g^{22} = \frac{1}{g_{22}}$ slik at

$$\begin{aligned}
-\Gamma_{21,s}\Gamma^s_{12} &= -\Gamma_{21,1}\Gamma^1_{12} - \Gamma_{21,2}\Gamma^2_{12}\\
&= -\Gamma_{21,1}\Gamma_{12,1}g^{11} - \Gamma_{21,2}\Gamma_{12,2}g^{22}\\
&= -\frac{1}{4g_{11}}\left(\frac{\partial g_{11}}{\partial x^2}\right)^2 - \frac{1}{4g_{22}}\left(\frac{\partial g_{22}}{\partial x^1}\right)^2
\end{aligned}$$

tilsvarande resultat finn ein for

$$\begin{aligned}
\Gamma_{11,s}\Gamma^s_{22} &= \Gamma_{11,1}\Gamma^1_{22} + \Gamma_{11,2}\Gamma^2_{22}\\
&= \Gamma_{11,1}\Gamma_{22,1}g^{11} + \Gamma_{11,2}\Gamma_{22,2}g^{22}\\
&= -\frac{1}{4g_{11}}\frac{\partial g_{11}}{\partial x^1}\frac{\partial g_{22}}{\partial x^1} - \frac{1}{4g_{22}}\frac{\partial g_{11}}{\partial x^2}\frac{\partial g_{22}}{\partial x^2}
\end{aligned}$$

Ved å setja inn i likn. (B.22) finn ein då

$$\begin{aligned}
R_{1212} &= \frac{1}{2}\frac{\partial^2 g_{22}}{(\partial x^1)^2} + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 g_{11}}{(\partial x^2)^2}\\
&\quad -\frac{1}{4g_{11}}\left(\frac{\partial g_{11}}{\partial x^2}\right)^2 - \frac{1}{4g_{22}}\left(\frac{\partial g_{22}}{\partial x^1}\right)^2\\
&\quad -\frac{1}{4g_{11}}\frac{\partial g_{11}}{\partial x^1}\frac{\partial g_{22}}{\partial x^1} - \frac{1}{4g_{22}}\frac{\partial g_{11}}{\partial x^2}\frac{\partial g_{22}}{\partial x^2}\\
&= \frac{1}{2}\frac{\partial^2 g_{22}}{(\partial x^1)^2} + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 g_{11}}{(\partial x^2)^2}\\
&\quad -\frac{1}{4g_{11}g_{22}}\left(\frac{\partial(g_{11}g_{22})}{\partial x^1}\frac{\partial g_{22}}{\partial x^1} + \frac{\partial(g_{11}g_{22})}{\partial x^2}\frac{\partial g_{11}}{\partial x^2}\right)
\end{aligned}$$

No har vi

$$\sqrt{g}\frac{\partial}{\partial x^1}\frac{1}{\sqrt{g}} = -\frac{1}{2}\frac{1}{g_{11}g_{22}}\frac{\partial(g_{11}g_{22})}{\partial x^1} \tag{B.23}$$

og

$$\sqrt{g}\frac{\partial}{\partial x^2}\frac{1}{\sqrt{g}} = -\frac{1}{2}\frac{1}{g_{11}g_{22}}\frac{\partial(g_{11}g_{22})}{\partial x^2} \tag{B.24}$$

slik at vi kan omforma uttrykket for R_{1212} slik

$$R_{1212} = \frac{\sqrt{g}}{2}\left\{\frac{\partial}{\partial x^1}\left(\frac{1}{\sqrt{g}}\frac{\partial g_{22}}{\partial x^1}\right) + \frac{\partial}{\partial x^2}\left(\frac{1}{\sqrt{g}}\frac{\partial g_{11}}{\partial x^2}\right)\right\} \tag{B.25}$$

Vi finn då den absolutte skalaren

$$K = -\frac{R_{1212}}{g} = -\frac{1}{2\sqrt{g}}\left\{\frac{\partial}{\partial x^1}\left(\frac{1}{\sqrt{g}}\frac{\partial g_{22}}{\partial x^1}\right) + \frac{\partial}{\partial x^2}\left(\frac{1}{\sqrt{g}}\frac{\partial g_{11}}{\partial x^2}\right)\right\} \tag{B.26}$$

som er same uttrykket som vi får frå Liouville sin formel likn.(B.11) for ei flate med metrikk

$$ds^2 = Edudu + Gdvdv = g_{11}dx^1dx^1 + g_{22}dx^2dx^2 \tag{B.27}$$

For ei kuleflate altså eit to dimensjonalt rom har ein

$$ds^2 = R^2 d\theta d\theta + R^2 \sin^2\theta d\phi d\phi\,, \tag{B.28}$$

eller $g_{11} = g_{\theta\theta} = R^2$, $g_{22} = g_{\phi\phi} = R^2\sin^2\theta$, $\partial/\partial x^1 = \partial/\partial\theta$ og $\partial/\partial x^2 = \partial/\partial\phi$ og $g = R^4\sin^2\theta$,gjev innsett i formelen for totalkrumming likn. (B.26) at

$$K = \frac{1}{R^2} \tag{B.29}$$

som samsvar med det vi fann ved å bruka formelen til Euler likn. (B.9) eller Liouville likn. (B.11).