M001
OBLIGATORISK ØVING NR. II
HAUST 2000
Oppgåver med svar

Oppgåve I:

Ein funksjon f er definert på intervallet $[0,5]$ ved

$$f(x) = 2xe^{-x}.$$

a) Finn $f'(x)$, og finn ut kvar f veks, og kvar f minkar. Finn og $f''(x)$, og finn eventuelle vendepunkt for grafen.

SVAR:

$$f'(x) = -2(x-1)e^{-x}\,, \qquad f''(x) = -2(x-2)e^{-x}\,.$$

Vi har at $f(x)$ veks på $[0,1]$ og avtar på $[1,5]$

Vi har $f''(2) = 0$ og $f''(x)$ skifter teikn om $x = 2$, d.v.s. $x = 2$ er eit vendepunkt.

b) Skisser grafen til f, og rekn ut arealet avgrensa av grafen til f, $x-$aksen, og linjene $x = 0$ og $x = 5$.

SVAR: Punkt på grafen: $f(0) = 0$, $f(1) = \frac{2}{e} \approx 0,7$, $f(2) = \frac{4}{e^2} \approx 0,5$ og $f(5) = \frac{10}{e^5} \approx 0,07$.

Oppgåve II:

Vi har følgjande eigenverdeproblem

$$\mathbf{A}\cdot\mathbf{x} = \lambda\mathbf{x}\,, \quad \text{der matrisa } \mathbf{A} \text{ er gjeven som} \quad \mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}. \qquad (1)$$

a) Vis at problemet har desse eigenverda: $\lambda_1 = 3$ og $\lambda_2 = -1$,

SVAR: Determinanten til matrisa $\mathbf{A}(\lambda) \stackrel{def}{=} \begin{bmatrix} 1-\lambda & 2 \\ 2 & 1-\lambda \end{bmatrix}$ sett lik null, gjev likninga for eigenverdiane altså

$$\det \begin{bmatrix} 1-\lambda & 2 \\ 2 & 1-\lambda \end{bmatrix} = 0 \qquad \Rightarrow \qquad (1-\lambda)^2 - 4 = 0\,, \quad (1-\lambda) = \pm 2$$

som gjev $\lambda_1 = -1$ og $\lambda_2 = 3$

b) Finn eigenvektorane svarande til $\lambda_1 = -1$ og $\lambda_2 = 3$.

SVAR: Lat eigenvektorane vere $\mathbf{a} \stackrel{def}{=} \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \end{bmatrix}$ og $\mathbf{b} \stackrel{def}{=} \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \end{bmatrix}$, vi finn då:

For $\lambda = \lambda_1 = -1$: $(1+1)a_1 + 2a_2 = 0$, slik at $a_1 = 1$ gjev $a_2 = -1$.

For $\lambda = \lambda_2 = 3$: $(1-3)b_1 + 2b_2 = 0$, slik at $b_1 = 1$ gjev $b_2 = 1$.

Merk at a_1 og b_1 kan veljast fritt. Det valet som er gjort er berre eitt av mange val.

c) Vis at dersom $\mathbf{v}$, er ein eigenvektor, så er $c\mathbf{v}$, også ein eigenvektor, der c er ein vilkårleg konstant.

SVAR: Når $\mathbf{v}$ er ein eigenvektor, så har ein

$$\mathbf{A} \cdot \mathbf{v} = \lambda \mathbf{v}$$

multiplikasjon av denne likninga med konstanten c gjev

$$\mathbf{A} \cdot c\mathbf{v} = \lambda c\mathbf{v}$$

som viser påstanden.

Oppgåve III:

Det er gjeve differensial-likning systemet

$$\frac{dx}{dt} = x + 2y\,, \tag{2}$$

$$\frac{dy}{dt} = 2x + y\,. \tag{3}$$

a) Er det nokon samanheng mellom dette systemet av differensial-likningar og Oppgåve II. Forklar i tilfelle kva slags samanheng der er.

SVAR: Systemet skrive på vektorform vert

$$\frac{d\mathbf{x}}{dt} = \mathbf{A} \cdot \mathbf{x}$$

der matrisa $\mathbf{A}$ er den same som under Oppgåve II. Løysing til systemet er bestemt av eigenverda og eigenvektorane som $\mathbf{a}e^{\lambda_1 t}$ og $\mathbf{b}e^{\lambda_2 t}$.

b) Løys dette systemet av differensiallikningar og skriv opp den generelle løysinga for $x(t)$ og $y(t)$.

SVAR: Den generelle løysinga kan då skrivast som

$$\mathbf{x}(t) = C_1 \mathbf{a} e^{\lambda_1 t} + C_2 \mathbf{b} e^{\lambda_2 t}$$

der C_1 og C_2 er vilkårlege konstantar. Vi kan også skrive dette som

$$\begin{aligned} x(t) &= C_1 e^{\lambda_1 t} + C_2 e^{\lambda_2 t} \\ y(t) &= -C_1 e^{\lambda_1 t} + C_2 e^{\lambda_2 t} \end{aligned}$$

eller

$$\begin{aligned} x(t) &= C_1 e^{-t} + C_2 e^{3t} \\ y(t) &= -C_1 e^{-t} + C_2 e^{3t} \end{aligned}$$

.

c) Finn spesielt den løysinga som har $x(0) = 1$ og $y(0) = 2$.

SVAR:

$$\begin{aligned} x(0) &= C_1 + C_2 = 1 \\ y(0) &= -C_1 + C_2 = 2\,, \end{aligned}$$

slik at $C_1 = -\frac{1}{2}$ og $C_2 = \frac{3}{2}$.

Oppgave IV:

a) Ei gruppe dyrevernarar opna bura i ein minkfarm i ei bygd i 1985. Talet på mink på frifot i bygda var 200 den 1. januar 1986 og 300 den 1. januar 1990. Dersom vi går ut frå at talet på frie mink etter buropninga heile tida har auka eksponensielt med tida, kor mange mink var då på frifot 1. januar 1999?

SVAR:

Ein eksponentiell modell gjev:

$$N(t) = N_0 e^{\alpha t}$$

der $N(t)$ er talet på mink til ei kvar tid t, og N_0 er talet på mink ved $t = 0$, α er vekstraten. Vi vel å starta tida ved 01.01.86. Tidsskalaen er i år. Vi har då $N(0) = N_0 = 200$ og $N(4)$ svarar til talet på mink 4 år seinare d.v.s. i 01.01.90. og då har ein

$$N(4) = 300 = 200e^{4\alpha}\,,$$

slik at $\ln \frac{3}{2} = 4\alpha$ og $\alpha = \frac{\ln \frac{3}{2}}{4} \approx 0,101$. Vi får då formelen

$$N(t) \approx 200e^{0,101\,t}\,.$$

I 1999, 13 år seinare er det etter denne modellen $N(13)$ mink på frifot, altså

$$N(13) = 200e^{13\cdot 0,101} = 743\,.$$

b) Vi vil setje opp ein differensiallikningsmodell for talet på frie mink i bygda. Vi går ut frå at vekstraten til talet på frie mink er proporsjonal med talet på frie mink, og nyttar år som tidseining. Proporsjonalitetsfaktoren kallar vi k. Set opp differensiallikninga for talet på frie mink, som dette fører til. Kva må proporsjonalitetsfaktoren k vera for at likningsmodellen skal stemme med opplysningane gitt i del a)?

SVAR: Differentiallikninga vert

$$\frac{dN}{dt} = kN$$

Drivasjon av formelen ovanfor under a) gjev

$$\frac{dN}{dt} = \alpha N$$

slik at k svarar til $\alpha \approx 0.101$.

Oppgave V:

a) Følgjande matrise har komplekse eigenverdiar. Finn desse, og gjev dei på forma $a + bi$:

$$\begin{bmatrix} 1 & 3 \\ -3 & 1 \end{bmatrix}$$

Teikn eigenverdiane i det komplekse planet.

SVAR:

Vi finn

$$(1-\lambda)^2 + 9 = 0\,, \quad \text{eller} \quad \lambda_1 = 1 + 3i \quad \text{og} \quad \lambda_2 = 1 - 3i\,.$$

b) Finn løysinga til systemet:

$$\begin{aligned} \tfrac{dx}{dt} &= x + 3y \\ \tfrac{dy}{dt} &= -3x + y \end{aligned} \tag{4}$$

som er slik at $x(0) = 4$, og $y(0) = 2$.

SVAR: Vi merkar oss at løysinga er ein kombinasjon av $e^t \sin 3t$ og $e^t \cos 3t$ slik at

$$x(t) = Ae^t \cos 3t + Be^t \sin 3t \tag{5}$$

$$y(t) = Ce^t \cos 3t + De^t \sin 3t \tag{6}$$

Vi finn

$$\frac{dx}{dt} = x - 3Ae^t \sin 3t + 3Be^t \cos 3t$$

samanlikning med første likninga i systemet gjeve i likning (4), viser at vi må ha

$$-3Ae^t \sin 3t + 3Be^t \cos 3t = 3y = 3Ce^t \cos 3t + 3De^t \sin 3t$$

slik at $3D = -3A$ og 3C=3B. Altså: $D = -A$ og $C = B$ (NB! Dette stemmer også med andre likninga i systemet gjeve i likning (4), kontroller dette! Merk også at vi her ikkje har gått vegen om eigenvektorar).

Vi kan då skriva

$$\begin{aligned} x(t) &= Ae^t \cos 3t + Be^t \sin 3t && (7) \\ y(t) &= Be^t \cos 3t - Ae^t \sin 3t\,. && (8) \end{aligned}$$

Og med $x(0) = 4$ og $y(0) = 2$ finn ein

$$\begin{aligned} x(0) &= A = 4 && (9) \\ y(0) &= B = 2\,. && (10) \end{aligned}$$

Slik at $A = 4$ og $B = 2$ gjev

$$\begin{aligned} x(t) &= 4e^t \cos 3t + 2e^t \sin 3t && (11) \\ y(t) &= 2e^t \cos 3t - 4e^t \sin 3t\,. && (12) \end{aligned}$$

c) Finn amplituden C og perioden T for den harmoniske svinginga, gitt ved $f(t) = 2 \cos 3t - 4 \sin 3t$. Gi eksakte svar.

SVAR: Vi har let $2 = R\cos\phi$ og $4 = R\sin\phi$ som gjev $R = \sqrt{20}$ og $\tan\phi = \frac{1}{2}$.

Vi finn då $f(t) = 2 \cos 3t - 4 \sin 3t = \sqrt{20}\,\{\cos 3t \cos\phi - \sin 3t \sin\phi\} = \sqrt{20}\cos(3t+\phi)$ der $\tan\phi = \frac{1}{2}$, bestemmer vinkelen ϕ.

Vi ser at amplituden er $\sqrt{20}$.

Vidare har ein at perioden P, er bestemt ved at

$$3(t+P) = 3t + 2\pi\,,$$

slik at $P = \frac{2\pi}{3}$

Oppgåve VI

På Festplassen i Bergen skal det setjast opp ein salshall i samband med eit tivoli. Ein set då opp ei ramme av stålrøyr, og dekkjer det heile med teltduk til slutt. Ramma vert danna av fire loddrette, like lange røyr med lengd x, samt fire vassrette røyr som formar eit rektangel, der hjørna er festa til toppen av dei loddrette røyra. Sidene i rektanglet er y og $z (x, y, z$ er alle målte i meter). Volumet xyz av hallen skal vera $4000\,m^3$.

a) Finn den totale lengda $L(x, y)$ av stålrøyr (målt i meter) som går med, uttrykt ved berre x og y. Finn også dei partielle deriverte

$$\frac{\partial L}{\partial x} \quad \text{og} \quad \frac{\partial L}{\partial y}.$$

SVAR:

Lenga L av stålrøyr vert $4x + 2y + 2z$. Volumet $xyz = 4000$ kan brukast til å eliminere z ved å løyse denne likninga med omsyn på z

$$z = \frac{4000}{xy}$$

Dette innsett i uttrykket for L gjev

$$L = L(x, y) = 4x + 2y + \frac{8000}{xy}$$

Vi finn vidare at

$$\frac{\partial L}{\partial x} = 4 - \frac{8000}{x^2 y} \tag{13}$$

$$\frac{\partial L}{\partial y} = 2 - \frac{8000}{xy^2} \tag{14}$$

b) Finn Hesse-matrisa til funksjonen $4x + 2y + \frac{8000}{xy}$, definert for positive x og y.

SVAR: Hesse- matrisa H, finn ein frå dei andrederiverte

$$\frac{\partial^2 L}{\partial x^2} = \frac{16000}{x^3 y} \tag{15}$$

$$\frac{\partial^2 L}{\partial y^2} = \frac{16000}{xy^3} \tag{16}$$

$$\frac{\partial^2 L}{\partial x \partial y} = \frac{8000}{x^2 y^2} \tag{17}$$

$$H = 8000 \begin{bmatrix} \frac{2}{x^3 y} & \frac{1}{x^2 y^2} \\ \frac{1}{x^2 y^2} & \frac{2}{xy^3} \end{bmatrix} \tag{18}$$

Forteiknet på determinanten, $\det H > 0$, til denne matrisa bestemmer om det stasjonære punktet d.v.s. der dei første partielle derivert er null, er ekstremalpunkt.

c) Finn det stasjonære punktet for funksjonen i del b). Er det stasjonære punktet eit lokalt minimumspunkt, eit lokalt maksimumspunkt, eller eit sadelpunkt? Tolk svaret i den praktiske situasjonen skissert ovanfor.

SVAR:

Ved å dividere likning (13) på likning (14), der vi har sett $\frac{\partial L}{\partial x} = 0$ og $\frac{\partial L}{\partial y} = 0$, finn ein $y = 2x$ og vidare $x = 1000^{\frac{1}{3}} = 10$ og $y = 2 \cdot 1000^{\frac{1}{3}} = 20$.

I vårt tilfelle ser ein at

$$\det H = 8000(4-1)\frac{1}{x^4y^4} = \frac{24000}{x^4y^4} > 0\,.$$

Sidan denne determinanten alltid er større enn null, kan vi berre ha ekstremalpunkt punkt. Og då $\frac{\partial^2 L}{\partial x}^2 > 0$, må dette vere eit minimum.

Oppgåve VI:

Ein lækjar tek for seg ei gruppe personar og undersøkjer røykjevanane deira over mange år. La x_n vera talet på ikkje-røykjarar i forsøksgruppa n år etter at undersøkinga starta, og la y_n vera talet på røykjarar i forsøksgruppa n år etter at undersøkinga starta. Heldigvis døyr ingen medan undersøkinga pågår. Lækjaren trur at talet på ikkje-røykjarar og røykjarar utviklar seg frå år til år etter modellen

$$\begin{aligned} x_{n+1} &= ax_n + (1-b)y_n \\ y_{n+1} &= (1-a)x_n + by_n\,, \end{aligned}$$

der a, b er reelle tal i det opne intervallet $(0,1)$.

a) Grunngi at eigenverdiane til matrisa $\begin{bmatrix} a & 1-b \\ 1-a & b \end{bmatrix}$ er $(a+b)-1$ og 1, og rekn ut eigenvektorane for matrisa.

SVAR:

$\det \begin{bmatrix} a-\lambda & 1-b \\ 1-a & b-\lambda \end{bmatrix} = (a-\lambda)(b-\lambda) - (1-a)(1-b) = 0\,.$

Ved inspeksjon ser ein at $\lambda = (a+b)-1$ og $\lambda = 1$, er røter i likninga for λ.

b) La $a = 0.9$ og $b = 0.7$ i dette spørsmålet, gå ut frå at modellen skissert ovanfor er korrekt, og at $x_0 = 600$, og $y_0 = 400$. Finn eit uttrykk for $\begin{bmatrix} x_n \\ y_n \end{bmatrix}$ ved å uttrykkje $\begin{bmatrix} 600 \\ 400 \end{bmatrix}$, som ein sum av eigenvektorar for ei passande matrise. Finn $\lim_{n\to\infty} x_n$ og $\lim_{n\to\infty} y_n$.

SVAR: Eigenvektorar:

i) $\lambda = (a+b)-1$: Lat eigenvektoren vere $\begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \end{bmatrix}$.

Vi har då at $(1-b)a_1 + (1-b)a_2 = 0$, slik at $\begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}$, er ein eigenvektor svarande til denne eigenverdien.

ii) $\lambda = 1$: Lat eigenvektoren vere $\begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \end{bmatrix}$.

Vi har då at $(a-1)b_1 + (1-b)b_2 = 0$, slik at $\begin{bmatrix} 1 \\ \frac{1-a}{1-b} \end{bmatrix}$, er ein eigenvektor svarande til denne eigenverdien.

Vi uttrykkjer no startvektoren ved hjelp av desse eigenvektorane $\begin{bmatrix} 600 \\ 400 \end{bmatrix} = C_1 \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix} + C_2 \begin{bmatrix} 1 \\ \frac{1-a}{1-b} \end{bmatrix} = C_1 \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix} + C_2 \begin{bmatrix} 1 \\ \frac{1}{3} \end{bmatrix}$, eller

$$\begin{aligned} C_1 + C_2 &= 600\,, \\ -C_1 + \frac{1}{3}C_2 &= 400\,, \end{aligned}$$

og vi finn $C_1 = -150$ og $C_2 = 750$. Vi har vidare

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} x_n \\ y_n \end{bmatrix} &= \mathbf{M} \begin{bmatrix} x_{n-1} \\ y_{n-1} \end{bmatrix} = \mathbf{M}^2 \begin{bmatrix} x_{n-2} \\ y_{n-2} \end{bmatrix} \\ &= \cdots = \mathbf{M}^n \begin{bmatrix} x_0 \\ y_0 \end{bmatrix} = \mathbf{M}^n \left\{ C_1 \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix} + C_2 \mathbf{M}^n \begin{bmatrix} 1 \\ \frac{1}{3} \end{bmatrix} \right\} \\ &= C_1\, 0,6^n \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix} + C_2\, 1^n \begin{bmatrix} 1 \\ \frac{1}{3} \end{bmatrix}\,, \end{aligned}$$

slik at $\lim_{n\to\infty} x_n = C_2 = 750$ og $\lim_{n\to\infty} y_n = \frac{1}{3}C_2 = 250$

Merk at vi har her brukt at $\mathbf{M}^n\mathbf{X} = \lambda^n\mathbf{X}$ når λ er ein eigenverdi med tilhøyrande eigenvektor $\mathbf{X}$ for matrisa $\mathbf{M}$.