ISSN 0132—4624
ISSN 0024—0850

ВЕСТНИК САНКТ-ПЕТЕРБУРГСКОГО УНИВЕРСИТЕТА '93

серия 1 МАТЕМАТИКА МЕХАНИКА АСТРОНОМИЯ

выпуск 3

УДК 62-50 Вестник СПбГУ. Сер. 1, 1993, вып. 3 (N 15)

Ф. В. Фомин

СИНТЕЗ ДИСКРЕТНОГО АЛГОРИТМА АДАПТИВНОГО УПРАВЛЕНИЯ ЛИНЕЙНЫМ ОБЪЕКТОМ МЕТОДОМ ФУНКЦИИ ЛЯПУНОВА

1. Введение. В последнее время в рамках общей теории управления интенсивно развивается метод синтеза алгоритмов адаптации с помощью функций Ляпунова. Идея метода изложена, например, в работах [1, 2]. В. Драган и А. Халанай в недавней работе [3] предложили для построения адаптивного дискретного управления непрерывным объектом использовать специальную функцию Ляпунова. Покажем, что и для рассмотренного в [3] случая справедлив аналог теоремы, доказанной в [4].

2. Постановка задачи. Опишем предложенный в [3] алгоритм адаптивного управления. Предположим, что стационарный объект управления (ОУ) описывается линейным дифференциальным уравнением

$$dx/dt = Ax + Bu, \quad y = Cx, \quad t \geqslant 0, \tag{1}$$

где $x = x(t)$ — вектор состояния в момент времени t, $x \in R^n$; $u = u(t)$ — управляющее воздействие и $y(t)$ — вектор выходов ОУ в тот же момент времени, $u, y \in R^m$, $m \leqslant n$; матрицы A, B, C не зависят от времени и имеют соответствующие размеры. Подчеркнем, что векторы u и y имеют одинаковую размерность (число управляющих и выходных переменных одинаково). Кроме того, предполагается, что матрица CB обратима, и полиномиальная функция

$$\Phi(\lambda) = \det \begin{Vmatrix} A - \lambda I & B \\ C & 0 \end{Vmatrix} \tag{2}$$

не имеет корней в замкнутой правой полуплоскости. Множество матриц $\{A, B, C\}$, обладающих указанными свойствами (при фиксированных их размерах), обозначим через N. Предполагается, что выделено некоторое ограниченное множество $N_0 \subset N$ таких матриц, но сами матрицы A, B, C неизвестны. В этих условиях требуется указать способ формирования управляющих воздействий $u(t)$, обеспечивающих выполнение цели управления:

$$\lim_{t\to\infty} x(t) = 0, \quad \lim_{t\to\infty} u(t) = 0 \tag{3}$$

независимо от начальных данных.

Управляющие воздействия в момент времени t формируются в виде

$$u(t) = (\theta^{(k)})^* y(t_k), \; t_k < t \leqslant t_{k+1}, \; t_k = hk, \; k = 1, \dots, \tag{4}$$

где $\theta^{(k)}$ — $(m \times m)$-матрицы, которые интерпретируются как параметры управляющей системы. Таким образом, управление строится в виде кусочно-постоянной функции времени. Матрицы $\theta^{(k)}$ будем выбирать как неупреждающие функционалы от процесса управления

$$\theta_j^{(k+1)} = \theta_j^{(k)} + hF_j^{(k)} \quad (y_s, \, s \leqslant k), \tag{5}$$

где $\theta_j^{(k)}$ — столбцы матрицы $\theta^{(k)}$, а $F_j^{(k)}$, $j = 1, 2, \dots, m$ — непрерывные вектор-функции, определенные при всех значениях своих аргументов.

В работе [3] показано, что управляющая система (4) с алгоритмом настройки параметров обратной связи

$$\theta_j^{(k+1)} = \theta_j^{(k)} - h[(g_j^* y(t_k))P_j y(t_k)] \tag{6}$$

при достаточно малом шаге дискретизации $h > 0$ является адаптивной (в произвольном ограниченном классе $N_0 \subset N$ по отношению к цели управления (3)). В соотношении (6) P_j — произвольные положительные матрицы, g_j — столбцы матрицы G^*,

$$G = Q(CB)^{-1}, \tag{7}$$

где Q — произвольная положительная $(m \times m)$-матрица ($y^*Qy > 0$ при любом ненулевом $y \in R^m$).

Этот интересный результат основан на построении специальной функции Ляпунова для системы управления (1), (4), (6). Ниже устанавливается, что алгоритм адаптации (6) является необходимым условием существования такой функции Ляпунова у системы управления (1), (4), (5).

3. Основной результат. Введем матрицу

$$\hat{\theta} = -\varepsilon^{-1}G^*, \tag{8}$$

где ε — положительное число, выбором которого распорядимся позднее, и пусть D–$((n-m)\times m)$-матрица максимального ранга, удовлетворяющая условию

$$DB = 0. \tag{9}$$

Заметим, что предположение о максимальности ранга означает невырожденность матрицы DD^*. Предложенная в [3] функция Ляпунова имеет вид

$$V(y,z,\theta) = y^*Hy + z^*Rz + \sum_{j=1}^{m}(\theta_j - \hat{\theta}_j)^* P_j^{-1}(\theta_j - \hat{\theta}_j), \tag{10}$$

где $H = [(CB)^{-1}]^*Q(CB)^{-1}$, $z = Dx$, $\hat{\theta}_j$ — столбцы матрицы $\hat{\theta}$, (см.(8)), а симметричная матрица R удовлетворяет условию

$$E^*R + RE = -I, \tag{11}$$

где

$$E = DA(I - B(CB)^{-1}C)D^*(DD^*)^{-1}. \tag{12}$$

Нетрудно убедиться, что функция (2) не имеет корней в правой замкнутой полуплоскости в том и только том случае, если матрица (12) гурвицева. Поэтому уравнением Ляпунова (11) матрица R определяется однозначно и является положительной матрицей. Таким образом, функция (10) положительна при любых ненулевых значениях переменных y, z, $(\theta - \hat{\theta}) = \|(\theta_1 - \hat{\theta}_1), \dots, (\theta_m - \hat{\theta}_m)\|$. В [3] показано, что приращение функции (10) в силу системы (1), (4), (6) неположительно при любых значениях этих переменных. Более того, справедливо неравенство

$$\begin{gathered} V(y_{k+1}, z_{k+1}, \theta^{(k+1)}) - V(y_k, z_k, \theta^{(k)}) \leqslant \\ \leqslant -h[\varepsilon^{-1}|My_k + \varepsilon Lz_k|^2 + O(h^2)], \end{gathered} \tag{13}$$

где для краткости обозначено $y_k = y(t_k)$, $z_k = z(t_k)$ и $O(h^2)$ — величина, квадратичная относительно переменных y_k, z_k, $\theta_j^{(k)}$, $j = 1, 2, \dots, m$. Из неравенства (13) с учетом формулы (10) почти непосредственно следуют предельные равенства (3) и существование $\lim_{k\to\infty} \theta^{(k)}$.

Пусть $y_k = y(t_k)$, $z_k = z(t_k)$ — значения переменных y и z в соответствующие моменты времени. Векторы $y_{k+1} = y(t_{k+1})$, $z_{k+1} = z(t_{k+1})$ и матрица $\theta^{(k+1)}$ в силу соотношений (1), (4), (5), могут быть выражены как вполне определенные функции переменных y_s, $s \leqslant k$, z_k, $\theta^{(k)}$ (см. Приложение). Обозначим через $G_k(y_1, \dots, y_k, z_k, \theta^{(k)}, h)$ приращение функции (10) в момент времени t_k в силу системы (1), (4), (5),

$$G_k(y_1, \dots, y_k, z_k, \theta^{(k)}, h) = \\ = V(y_{k+1}, z_{k+1}, \theta^{(k+1)}) - V(y_k, z_k, \theta^{(k)}). \tag{14}$$

При фиксированных функциях $F_j^{(k)}(\cdot)$ в (5) формула (14) определяет непрерывную функцию $G_k(\cdot)$ при произвольных значениях аргументов $y_s \in R^m$, $s \leqslant k$, $z_k \in R^{n-m}$, $\theta^{(k)} \in R^{m\times n}$, $h \in R$.

Предположим, что при любом k для каждого набора аргументов $\{y_s, s \leqslant k, z_k, \theta^{(k)}\}$ найдется число $h_* = h_*(y_s, s \leqslant k, z_k, \theta^{(k)})$, такое, что при $h \leqslant h_*$ выполнено неравенство

$$G_k(y_1, \dots, y_k, z_k, \theta^{(k)}, h) \leqslant 0. \tag{15}$$

Тогда справедливо следующее утверждение.

Теорема. *Для того чтобы в произвольный «момент времени» t_k, $k = 1, \dots$, приращение* (14) *функции* (10) *в силу системы управления* (1), (4), (5) *при каждом наборе аргументов $\{y_1, \dots, y_k, z_k, \theta^{(k)}\}$ и при всех достаточно малых $h > 0$ удовлетворяло неравенству* (15), *необходимо и достаточно, чтобы его алгоритм адаптации*(5) *имел вид* (6).

Доказательство теоремы приведено в Приложении.

Таким образом, проблема существования и вид алгоритма адаптации в системе управления (1), (4), (5) оказались эквивалентными проблеме существования функции Ляпунова (10), для которой приращение (14) в силу системы управления удовлетворяет условию (15).

4. Замечания. Доказанная теорема является полным аналогом соответствующего утверждения, полученного в [4] для алгоритма адаптации в непрерывном времени. Остановимся на этом вопросе подробнее.

Устремляя шаг дискретизации h к нулю в соотношении (6), придем к непрерывному алгоритму адаптации

$$d\theta_j/dt = -(g_j^* y) P_j y, \quad j = 1, 2, \dots, m. \tag{16}$$

Именно этот алгоритм рассматривался в работе [4].

Введем передаточную функцию $W(\lambda)$ *ОУ* (1),

$$W(\lambda) = C(\lambda I - A)^{-1} B. \tag{17}$$

Учитывая, что ранг матрицы B равен m (следствие предположения об обратимости матрицы CB), покажем, что функция $GW(\lambda)$ является строго минимально-фазовой в смысле определения, введенного в [4]. Согласно этому определению матрица $GW(\lambda)$ — строго минимально-фазовая, если выполнены условия:

а) полином $\psi(\lambda) = \det(A - \lambda I) \det GW(\lambda)$ — гурвицев;

б) матрица $\Gamma = \lim_{|\lambda|\to\infty} \lambda GW(\lambda)$ — положительна.

Проверка этих условий в рассматриваемом случае осуществляется просто. При выполнении этих условий в [4] установлено, что функция

$$V(x, \theta) = x^* \hat{H} x + \sum_{j=1}^{m} (\theta_j - \hat{\theta}_j)^* H_j (\theta_j - \hat{\theta}_j),$$

где $\hat{H}$, H_j — положительные матрицы, удовлетворяет условию $\dot{V}(x,\theta) < 0$ при $x \neq 0$ в том и только том случае, если алгоритм адаптации имеет вид (16).

Приложение. Доказательство теоремы. Пусть

$$f_j^{(k)}(y_s, s \leqslant k) = F_j^{(k)}(y_s, s \leqslant k) + (g_j^* y_k) P_j y_k. \tag{18}$$

Тогда алгоритм адаптации (5) перепишется в виде

$$\theta_j^{(k+1)} = \theta_j^{(k)} - h(g_j^* y_k) P_j y_k + h f_j^{(k)}(y_s, s \leqslant k). \tag{19}$$

Согласно сделанному ранее предположению вектор-функции $f_j^{(k)}(\cdot)$ определены при всех значениях аргументов и непрерывны в каждом ограниченном множестве. Учитывая кусочно-постоянный характер управления, можно получить соотношение

$$x_{k+1} = \hat{A} x_k + \hat{B} u_k, \tag{20}$$

где $\hat{A} = \exp\{hA\}$, $\hat{B} = \int\limits_0^h \exp\{As\} B ds$. Перейдем к новым координатам $y = Cx$, $z = Dx$. Тогда

$$x = F_1 y + F_2 z, \tag{21}$$

где

$$F_1 = B(CB)^{-1}, \quad F_2 = (I - B(CB)^{-1}C)D^*(DD^*)^{-1}. \tag{22}$$

В силу (20) имеем

$$\begin{aligned}
y_{k+1} &= C\exp\{hA\}F_1 y_k + C\exp\{hA\}F_2 z_k + \\
&\quad + h[CB + \int\limits_0^h (\exp\{As\} - I) ds B](\theta^{(k)})^* y_k, \\
z_{k+1} &= D\exp\{hA\}F_1 y_k + D\exp\{hA\}F_2 z_k + \\
&\quad + D\int\limits_0^h (\exp\{As\} - I) ds B(\theta^{(k)})^* y_k. \\
\theta_j^{(k+1)} &= \theta_j^{(k)} - h(g_j^* y_k) P_j y_k + h f_j^{(k)}(y_s, s \leqslant k).
\end{aligned} \tag{23}$$

Обозначим

$$\begin{aligned}
A_{11} &= CAF_1, \quad A_{21} = DAF_1, \\
A_{12} &= CAF_2, \quad A_{22} = DAF_2.
\end{aligned} \tag{24}$$

С учетом обозначений (24) соотношения (23) можно переписать так

$$\begin{aligned}
y_{k+1} &= y_k + h[A_{11} y_k + A_{12} z_k + CB[\theta^{(k)}]^* y_k] + O(h^2), \\
z_{k+1} &= z_k + h[A_{21} y_k + A_{22} z_k] + O(h^2), \\
\theta_{j+1}^{(k+1)} &= \theta_j^{(k)} - h(g_j^* y_k) P_j y_k + h f_j^{(k)}(y_s, s \leqslant k) + O(h^2),
\end{aligned}$$

где через $O(h^2)$ обозначены члены порядка h^2 и выше. С учетом этих соотношений имеем

$$\begin{aligned}
&\Delta V(y_s, s \leqslant k, z_k, \theta^{(k)}) = V(y_{k+1}, z_{k+1}, \theta^{(k+1)}) - \\
&- V(y_k, z_k, \theta^{(k)}) = 2h\{y_k^*(A_{11}^* H + \hat{\theta}^{(k)}(CB)^* H) y_k + \\
&+ z_k^*(A_{12}^* H + RA_{21}) y_k + z_k^*(A_{22}^* R + RA_{22}) z_k\} + \\
&+ 2h \sum_{j=1}^m [f_j^{(k)}(y_s, s \leqslant k)]^* P_j^{-1} \theta_j^{(k)} + O(h^2).
\end{aligned} \tag{25}$$

Так как $\hat{\theta} = -\varepsilon^{-1}[(CB)]^{-1}Q^*$, то выбором $\varepsilon > 0$ можно добиться, чтобы матрица $S = -\varepsilon(A_{11}^* H + HA_{11}) + 2[(CB)^{-1}]^* Q^2 (CB)^{-1}$ была положительной. Учитывая формулу $H = [(CB)^{-1}]^* Q(CB)^{-1}$, можем переписать соотношение (25) в виде

$$\Delta V(y_s, s \leqslant k, z_k, \theta^{(k)}) = -2h\varepsilon^{-1}|My_k + \varepsilon L z_k|^2 -$$
$$- hz_k^* N z_k + 2h \sum_{j=1}^{m} [f_j^{(k)}(\cdot)]^* P_j^{-1} \theta_j^{(k)} + O(h^2),$$

где $M^*M = S$, $N = A_{22}^* R + RA_{22} - \epsilon^2 LL^*$, $L = S^{-1/2}(A_{12}H + HA_{21})$. Уменьшая при необходимости ε, можно добиться, чтобы матрица N была положительной. Так как правая часть полученного соотношения линейна по $\theta^{(k)} = \|\theta_1^{(k)}, \theta_2^{(k)}, \ldots, \theta_m^{(k)}\|$ и условие (15) выполнено при всех достаточно малых h, то это может быть лишь при $f_j^{(k)}(\cdot) \equiv 0$. Таким образом, в силу условия (15), из (18) следует, что $F_j^{(k)}(y_s, s \leqslant k) \equiv -(g_j^* y_k) P_j y_k$, т.е. алгоритм адаптации (5) имеет вид (6). Для алгоритма (6) выполнение неравенства $G_k(\cdot) \leqslant 0$ установлено в [3]. Теорема доказана.

SUMMARY

F. V. Fomin. Adaptive control discrete algorithm syntesis for object using Liapunov's method. Adaptive discrete control problem with partly observed state vector is investigated. The equivalence between the special adaptive control and a Lyapunov function proposed by V. Dragan and A. Halanay is established.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Петров Б. Н., Рутковский В. Ю., Крутова И. Н., Земляков С. Д.* Принципы построения и проектирования самонастраивающихся систем управления. М., 1972.
2. *Parks P. C.* // IEEE Aut. Control. 1966. Vol. AC-11, N 3. P. 362-367.
3. *Драган В., Халанай А.* // Сиб. мат. журн. 1990. Т. 31, N 6. С. 200-205.
4. *Фрадков А. Л.* // Автоматика и телемеханика, 1974. N 3. С. 357-383.

Статья поступила в редакцию 16 июля 1992 г.