ISSN 0132—4624
ISSN 0024—0850

ВЕСТНИК САНКТ-ПЕТЕРБУРГСКОГО УНИВЕРСИТЕТА '94

серия 1 МАТЕМАТИКА МЕХАНИКА АСТРОНОМИЯ выпуск 3

УДК 517.977 **Вестник СПбГУ. Сер. 1, 1994, вып. 3 (N 15)**

Ф. В. Фомин

ЗАДАЧА ПОИСКА НА ГРАФАХ С ОГРАНИЧЕНИЕМ СКОРОСТИ

1. В настоящей работе рассматривается следующая задача поиска. Пусть граф Γ определяется множеством вершин $V\Gamma$, множеством ребер $E\Gamma$ и отношением инцидентности, которое каждому ребру сопоставляет одну или две вершины, называемые его концами.

Будем говорить, что Γ — топологический граф, если вершины Γ суть точки в $\mathbb{R}^3$, а ребра — непересекающиеся конечнозвенные ломаные с концами в соответствующих вершинах, замкнутые в $\mathbb{R}^3$. На протяжении всей статьи будут рассматриваться только связные графы.

В начале 80-х годов Н. Н. Петровым в работе [1] была поставлена следующая задача поиска. Пусть Γ — связный топологический граф. На Γ находится n преследователей $P_1, \dots, P_n$ и убегающий E. Предполагается, что последователи и убегающий обладают в $\mathbb{R}^3$ (граф вложен в $\mathbb{R}^3$) простыми движениями:

$$\begin{aligned} &(P_i)\colon \dot{x} = u_i, \qquad \|u_i\| \leqslant u, \qquad i \in \overline{1,n},\\ &(E)\colon \dot{y} = u_0, \qquad \|u_0\| \leqslant v, \end{aligned}$$

$x_i \in \mathbb{R}^3$, при $i \in \overline{1,n}$, $y \in \mathbb{R}^3$, причем Γ является для игроков фазовым ограничением. Допустимыми управлениями игроков являются кусочно-постоянные функции, заданные на произвольных промежутках $[0,T]$.

Убегающий E считается пойманным преследователем P_i в момент t, если $x_i(t) = y(t)$. Совокупность траекторий преследователей, заданных на промежутке $[0,T]$, называется программой преследователей, заданной на промежутке $[0,T]$. Программа n преследователей $\Pi(x_1,\dots,x_n)$, заданная на $[0,T]$, называется выигрывающей, если для любой траектории убегающего y, заданной на $[0,T]$, существуют $t \in [0,T]$ и $i \in \overline{1,n}$, такие, что $x_i(t) = y(t)$. Говорится, что траектория убегающего $y(t)$, $t \in [0,T]$, обеспечивает уклонение от поимки для программы преследователей $\Pi(x_1,\dots,x_n)$, действующей на $[0,T]$, если $x_i(t) \neq y(t)$, $t \in [0,T]$, $i \in \overline{1,n}$.

В работе [1] был поставлен вопрос о нахождении наименьшего натурального числа n, такого, что у n преследователей существует выигрывающая программа, заданная на некотором промежутке $[0,T]$. Ясно, что эта величина зависит только от графа Γ и отношения $\mu = uv^{-1}$. Эту величину будем обозначать $S_\mu(\Gamma)$. Далее, не умаляя общности, мы будем считать константу v равной единице, тогда $\mu = u$. В данной работе рассматривается случай, когда число преследователей равно двум.

Пусть Γ — топологический граф. Определим $\gamma(\Gamma) = \inf\{\mu\colon S_\mu(\Gamma) \leqslant 2\}$. Сославшись на [2, 4], можно сказать, что когда характеристика графа Γ, называемая поисковым числом $S(\Gamma)$, не больше двух, то $\gamma(\Gamma) = 0$. Как было показано в [3], если $S(\Gamma) > 2$, в графе Γ существуют по крайней мере две вершины степени $\geqslant 3$.

Пусть $V_1\Gamma$ — множество всех вершин степени $\geqslant 3$ графа Γ. В дальнейшем мы будем полагать, что $|V_1\Gamma| \geqslant 2$. Как показано в [1], на любом топологическом графе двое преследователей осуществляет поимку при достаточно большом μ, поэтому $\gamma(\Gamma)$ всегда существует.

Пусть $W(\Gamma_0)$ — класс всех топологических графов, изоморфных графу Γ_0. В данной работе доказывается, что величина $\mu^*(\Gamma_0) = \sup_{\Gamma \in W(\Gamma_0)} \gamma(\Gamma)$ конечна для произвольного графа Γ_0.

Пусть Γ — топологический граф. Введем в Γ метрику. Пусть $A, B \in \Gamma$. Через $\rho(A,B)$ обозначается длина кратчайшего пути (по евклидовой норме) в $\mathbb{R}^3$ с концами A и B, целиком лежащего на Γ. Если A и B лежат на одном ребре a, то через $\rho_a(A,B)$ обозначается длина кратчайшего пути, целиком лежащего на этом ребре, с концами A и B. Через $\|a\|$ будем обозначать длину ребра a, а через $\Delta(\Gamma)$ максимальную степень вершин графа Γ.

2. Пусть $A \in V\Gamma$, $b > 0$, $\hat{a}_1, \ldots, \hat{a}_k$ — все инцидентные к A ребра, $k \leqslant \Delta(\Gamma)$. Если среди ребер $\hat{a}_i$, $i \in \overline{1,k}$, есть петли, то, поместив на каждой петле $\hat{a}$ вершину степени два на расстоянии $\|\hat{a}\|/2$ от A, мы получим новый набор ребер, инцидентных A, в котором нет петель. Обозначим этот набор $a_1, \ldots, a_m$, $m \leqslant \Delta(\Gamma)$. Отметим на ребрах a_i такие точки B_i, что $\rho_{a_i}(B_i, A) = \min(\|a_i\|, b)$. Будем говорить, что с момента t_1 по t_2 игроки P_1 и P_2 производят b-заметание вершины A, если один из игроков с t_1 по t_2 стоит в A, а второй со скоростью, равной по норме μ, совершает переходы из A в B_i и из B_i в A по a_i для всех $i \in \overline{1,m}$.

Если $p = \Delta(\Gamma)$, то за время $\leqslant 2pb\mu^{-1}$ преследователи могут совершить b-заметание любой вершины графа Γ.

Заметим, что число $\mu^*(\Gamma_0)$ никак не зависит от числа вершин степени два в графе Γ_0. Поэтому далее будем полагать, что у рассматриваемых нами графов нет вершин степени два.

Лемма 1. *Пусть a — максимальная длина ребра графа Γ, $n = |V_1\Gamma|$. Тогда для любых A, $B \in V_1\Gamma$ существует траектория одного из преследователей $x(t)$, $t \in [0, 2na\mu^{-1}]$, $x(0) = A$, $x(2na\mu^{-1}) = B$, и для любой вершины $C \in V_1\Gamma$ существует такой момент $t' \in [0, 2na\mu^{-1}]$, что $x(t') = C$.*

Доказательство. Достаточно показать, что если граф Γ — дерево, $n = |V\Gamma|$, то для любых вершин A и B дерева Γ существует траектория $x(t)$, $t \in [0, 2na\mu^{-1}]$, где a — максимальная длина ребра дерева Γ, причем $x(0) = A$, $x(2na\mu^{-1}) = B$ и для любой вершины $C \in V\Gamma$ существует $t' \in [0, 2na\mu^{-1}]$, что $x(t') = C$. Действительно, доказав это, мы можем рассматривать для произвольного графа Γ лишь движение игрока по остовному дереву графа Γ. Если число вершин дерева равно двум, то утверждение верно. Пусть для любого дерева Γ' с максимальной длиной ребра a', $|V\Gamma'| = n$ и любых A, $B \in V\Gamma'$ существует траектория $x'(t)$, $t \in [0, 2na'\mu^{-1}]$ с указанными свойствами. Покажем, что для произвольного дерева Γ, $|V\Gamma| = n+1$ и произвольных A, $B \in V\Gamma$ также существует траектория $x(t)$, $t \in [0, 2na'\mu^{-1}]$, удовлетворяющая нужным условиям.

Пусть A, $B \in V\Gamma$. Возможны два случая:

a) в Γ есть висячая вершина, отличная от A и B,

b) в Γ нет висячих вершин, отличных от A и B.

a) Рассмотрим висячую вершину C, отличную от A и B. Пусть C' — смежная к C вершина, $[C, C')$ — ребро с концами C и C' без точки C'. На дереве $\Gamma' = \Gamma \setminus [C, C')$ существует траектория $x'(t)$, $t \in [0, 2na\mu^{-1}]$, $x'(0) = A$, $x'(2na\mu^{-1}) = B$, проходящая через все вершины дерева Γ'.

Пусть $t' \in [0, 2na\mu^{-1}]$ — момент времени, для которого $x'(t') = C'$.

Рассмотрим траекторию на Г:

$$x(t) = \begin{cases} x'(t), \quad t \in [0, t']; \\ \text{игрок с } t' \text{ по } t' + 2a\mu^{-1} \text{ переходит из } C \text{ в } C' \\ \text{и обратно со скоростью } \beta; \\ x'(t - 2a\mu^{-1}), \quad t \in [t' + 2a\mu^{-1}, \quad 2(n+1)a\mu^{-1}], \end{cases}$$

где $\beta = \mu^{-1}a\rho(C, C')$.

б) Рассмотрим вершину A', смежную к A. На дереве $\Gamma' = \Gamma \setminus [A, A')$ существует траектория

$$x'(t), \quad t \in [0, 2na\mu^{-1}], \quad x'(0) = A, \quad x'(2na\mu^{-1}) = B,$$

проходящая через все вершины дерева Γ'. Рассмотрим на Г траекторию $x(t)$, $t \in [0, 2(n+1)a\mu^{-1}]$, где в начальный момент времени игрок находится в вершине A, после чего со скоростью $(1/2)\mu\rho(A, A')a^{-1}$ переходит в вершину A', а далее движется по траектории

$$x(t - 2a\mu^{-1}), \quad t \in [2a\mu^{-1}, 2(n+1)a\mu^{-1}].$$

Очевидно, что в обоих случаях траектории удовлетворяют нужным условиям.

Пусть a — максимальная длина ребра графа Г, $n = |V_1\Gamma|$, $b > 0$, $\tau = (2na + 2npb)\mu^{-1}$. Из леммы 1 следует, что для любых вершин $A, B \in V_1\Gamma$ существуют траектории $x_1(t)$, $x_2(t)$, $t \in [0, \tau]$, игроков P_1 и P_2, причем $x_1(0) = x_2(0) = A$, $x_1(\tau) = x_2(\tau) = B$, и за этот промежуток времени игроки P_1 и P_2 успевают совершить b-заметание всех вершин $V_1\Gamma$. Будем называть такие действия преследователей b-обходом $V_1\Gamma$.

Введем в рассмотрение отображение f, сопоставляющее топологическому графу Г, $|E\Gamma| = m$, последовательность $f(\Gamma) = \{a_i\}_{i=1}^k$, $k \leqslant m$, $a_1 < a_2 < \cdots < a_k$, причем $a \in \{a_i\}_{i=1}^k$ тогда и только тогда, когда в Г существует ребро длины a. Через $|f(\Gamma)|$ будем обозначать число элементов в $f(\Gamma)$.

Пусть $p = \Delta(\Gamma)$, $n = |V_1\Gamma|$.

Лемма 2. *На графе Г, $|f(\Gamma)| = 1$, при $\mu = 2n(p+1)$ для любой вершины $A \in V_1\Gamma$ существует выигрывающая программа*

$$\Pi_\Gamma^A(x_1(t), x_2(t)), \quad t \in [0, a],$$

где a — длина ребра графа Г, причем $x_1(0) = x_2(0) = x_1(a) = x_2(a) = A$.

Доказательство. Пусть в начальный момент времени преследователи находятся в вершине A, после чего совершают a-обход $V_1\Gamma$, заканчивающийся в вершине A. Такой обход, как показано выше, преследователи могут осуществлять за время $\leqslant [2na + 2npa]\mu^{-1} = a$. За это время убегающий не может пройти расстояние, большее a. Следовательно, на протяжении $[0, a]$ убегающий находится на расстоянии $\leqslant a$ от какой-то вершины $C \in V_1\Gamma$. Но это означает, что убегающий не может уклониться от встречи с преследователями, совершающими a-заметание вершины C.

Теорема 1. *На произвольном графе Г при $\mu = 3(2n)^m(p+1)$ существует выигрывающая программа, где $n = |V_1\Gamma|$, $p = \Delta(\Gamma)$, $m = |f(\Gamma)|$.*

Доказательство. Пусть для каких-то натуральных m, n, p верно, что на произвольном графе Γ', $|V_1\Gamma'| \leqslant n$, $\Delta(\Gamma') \leqslant p$, $|f(\Gamma')| \leqslant m$ для любой вершины $A' \in V_1\Gamma'$ при $\mu' = 3(2n)^m(p+1)$ существует выигрывающая программа $\Pi_{\Gamma'}^{A'}(x_1(t),x_2(t))$, $t\in[0,\tilde a]$, где $\tilde a$ — максимальная длина ребра графа Γ', причем $x_1(0)=x_2(0)=x_1(\tilde a)=x_2(\tilde a)=A'$. Докажем, что на произвольном графе Γ, $|V_1\Gamma|\leqslant n$, $\Delta(\Gamma)\leqslant p$, $|f(\Gamma)|\leqslant m+1$ для любой вершины $A\in V_1\Gamma$ при $\mu=3(2n)^{m+1}(p+1)$ существует выигрывающая программа $\Pi_\Gamma^A(x_1(t),x_2(t))$, $t\in[0,a]$, где a — максимальная длина ребра графа Γ, причем $x_1(0)=x_2(0)=x_1(a)=x_2(a)=A$. Заметим, что доказав сформулированное выше утверждение и воспользовавшись леммой 2, мы сразу получим доказательство теоремы.

Рассмотрим граф Γ, $|V_1\Gamma|\leqslant n$, $\Delta(\Gamma)\leqslant p$, $|f(\Gamma)|\leqslant m+1$. Пусть a' — максимальная из длин ребер графа Γ, меньшая a. Покажем, что если $a/a'=\alpha$, то при $\tilde\mu=\mu'\alpha$ на Γ существует выигрывающая программа на $[0,a']$.

Пусть $b_1,b_2\dots b_k$, $k<pn$, — ломаные длины a, являющиеся ребрами графа Γ, а A_i, B_i — вершины Γ, инцидентные ломаной b_i, $i\in\overline{1,k}$.

Из постановки задачи поиска следует, что факт существования выигрывающей программы не зависит от расположения вершин графа Γ в $\mathbb{R}^3$. Поэтому мы можем считать, что для каждого $i\in\overline{1,k}$ точки A_i, B_i можно соединить ломаной b_i' длины a'. Назовем $\widetilde\Gamma$ полученный топологический граф. Рассмотрим граф Γ', получаемый из $\widetilde\Gamma$ удалением ребер длиной a, т. е.

$$\Gamma'=\left(\widetilde\Gamma\cup_{i=1}^k b_i\right)\cup(\cup_{i=1}^k A_i)\cup(\cup_{i=1}^k B_i).$$

Очевидно, что $|f(\Gamma')|=m$. Поэтому при μ' на Γ' существует выигрывающая программа $\Pi_{\Gamma'}(x_1(t),x_2(t))$, $t\in[0,a']$.

Введем в рассмотрение отображение $\vartheta\colon\Gamma\longrightarrow\Gamma'$, задаваемое следующим образом: если $C\in\Gamma\cap\Gamma'$, то $\vartheta(C)=C$. Если C лежит на ломаной b_i, то $\vartheta(C)=C'$ лежит на b_i', причем $\rho_{b_i}(A_i,C)=\alpha\rho_{b_i}(A_i,C')$. Нетрудно убедиться, что траектории $\vartheta^{-1}\circ x_1(t)$ и $\vartheta^{-1}\circ x_2(t)$, $t\in[0,a']$, при $\tilde\mu=\alpha\mu'$ являются допустимыми, а программа $\Pi_\Gamma\left(\vartheta^{-1}\circ x_1(t),\vartheta^{-1}\circ x_2(t)\right)$, $t\in[0,a']$ является выигрывающей на Γ.

Из доказанного следует, что если $\alpha\leqslant 4\leqslant 2n$, то теорема верна.

Пусть $\alpha>4$. Разобьем множество $V_1\Gamma$ на классы эквивалентности $L_1,\dots,L_s$, $s\leqslant n$, следующим образом: вершины A и B принадлежат одному классу тогда и только тогда, когда существует путь из A в B, не содержащий ребер, длина которых равна a.

Будем говорить, что расстояние от точки A до множества L_i не превосходит ε, $\rho(L_i,A)\leqslant\varepsilon$, если найдется вершина $B\in L_i$, $\rho(A,B)\leqslant\varepsilon$.

Множество точек графа Γ, находящихся от множества L_i на расстоянии, не превосходящем a', обозначим через $\mathbf{L}_i$, $i\in\overline{1,s}$. Очевидно, что все $\mathbf{L}_i$, $i\in\overline{1,s}$, являются связными топологическими графами, $|V_1\mathbf{L}_i|\leqslant n$, $\Delta(\mathbf{L}_i)\leqslant p$ а так как $\alpha>2$, то $|f(\mathbf{L}_i)|\leqslant m$.

В каждом множестве L_i выделим точку A_i, $i\in\overline{1,s}$. По предположению при μ' на $\mathbf{L}_i$ существует выигрывающая программа на промежутке $[0,a']$, начинающаяся и заканчивающаяся в A_i. Тогда при $\mu=2n\mu'$ на $\mathbf{L}_i$ также существует выигрывающая программа, длительность ее не превосходит $a'/2n$ и в начальные и конечные моменты времени преследователи находятся в A_i. Будем обозначать такие программы

$$\Pi_{\mathbf{L}_i}(x_1(t),x_2(t)),\qquad t\in[t_0,t_0+a'/2n],$$
$$x_1(0)=x_2(0)=x_1(t_0+a'/2n)=x_2(t_0+a'/2n)=A_i.$$

Опишем алгоритм действий преследователей. Первый шаг алгоритма состоит из четырех подшагов. В начальный момент времени $t_0 = 0$ преследователи находятся в вершине A_s.

а) С момента t_0 по t_1 преследователи совершают a-обход $V_1\Gamma$, заканчивающийся в вершине A_1.

б) Пусть $\omega = 4n(p+1)\mu^{-1}$, а $l \in N$ такое, что $\omega^{l-1}a \geqslant a'$, но $\omega^l a < a'$. С t_1 по t_2 преследователи совершают последовательно $\omega^i a$-обходы $V_1\mathbf{L}_1$, $i \in \overline{1, l-1}$, причем эти обходы начинаются и заканчиваются в вершине A_1.

в) С t_2 по t_3 преследователи совершают ω^l-обход, заканчивающийся в вершине A_1.

г) С t_3 по $t_4 = t_3 + a'/2n$ преследователи движутся по траекториям $\Pi^{a'}_{\mathbf{L}_1}(x_1(t), x_2(t))$, $t \in [t_3, t_3 + a'/2n]$.

Первый шаг завершен.

В начале k-го шага преследователи находятся в вершине A_{k-1}, после чего выполняют подшаг а), заканчивающийся в вершине A_k, и подшаги б), в), г), начинающиеся и заканчивающиеся в вершине A_k. Число шагов s алгоритма не превосходит n, $s \leqslant n$. Преследователи начинают и заканчивают алгоритм в одной вершине A_s.

Покажем, что преследователи могут осуществить действия, описываемые алгоритмом, за промежуток времени $\leqslant a$.

Совершить a-обход $V_1\Gamma$ преследователи могут за время $\leqslant (2na + 2nap)\mu^{-1} = a\omega/2$, откуда $t_1 - t_0 \leqslant \omega a/2$.

На $\omega^i a$-обход $V_1\mathbf{L}_j$, $j \in \overline{1, s}$, требуется время $\leqslant (2na' + 2n\omega^i ap)\mu^{-1} \leqslant (2na\omega^i + 2n\omega^i ap)\mu^{-1} = \omega \cdot \omega^i a/2$, $i \in \overline{1, l-1}$, поэтому $t_2 - t_1 \leqslant \sum_{i=1}^{l-1} \omega^{i+1} \cdot a/2$.

На $\omega^l a$-обход $V_1\mathbf{L}_j$ времени требуется не более

$$\mu^{-1}(2n \cdot a' + 2n \cdot p \cdot \omega^l \cdot a) \leqslant 2n(p+1)\mu^{-1}a' = \omega \cdot a/2.$$

Получаем

$$t_3 - t_2 \leqslant \omega a'/2.$$

Из условия $a' \leqslant \omega^{l-1}a$ следует неравенство

$$t_3 - t_2 \leqslant 2n(p+1)\mu^{-1}\omega^l a = \omega^{l-1}a/2$$

Тем самым

$$t_3 - t_0 \leqslant \sum_{i=1}^{l-1} \omega^{i+1} \cdot a/2 + \omega^l a/2 + \omega a/2 < 2\sum_{i=1}^{\infty} \omega^i a/2 = \omega(1-\omega)^{-1}a =$$

$$= 4n(p+1)(\mu - 4n(p+1))^{-1}a = \frac{4na}{3(2n)^{m+1} - 4n} < a/2n \quad \text{при } m \geqslant 1,\ n \geqslant 2.$$

Поэтому

$$t_4 - t_0 < a/2n + a/2n = a/n.$$

Число шагов алгоритма $s \leqslant n$, время действия одного шага $< a/n$, значит время действия алгоритма $< (a/n)s \leqslant (a/n)n = a$.

Докажем, что указанная программа является выигрывающей. Предположим противное: существует траектория убегающего $y(t)$, $t \in [0, a]$, обеспечивающая уклонение от встречи с преследователями.

Убедимся в существовании такого номера $i \in \overline{1, s}$, что к моменту t — концу a-обхода $V_1\Gamma$ будет выполнено неравенство $\rho(L_i, y(t)) \leqslant a\omega/2$. Действительно, если с t_0 по t_1 убегающий был в одной из вершин $V_1\Gamma$, то за время $t_1 - t_0 \leqslant a\omega/2$ он не успеет отойти от этой вершины на расстояние, большее $a\omega/2$. Если же убегающий за время $[0, t_1]$ не был ни в одной из вершин $V_1\Gamma$, то на протяжении $[0,t_1]$ он находился на некотором ребре. Но при a-обходе $V_1\Gamma$ преследователи проходят целиком все ребра графа Γ и убегающий не может в таком случае уклониться от поимки.

Итак, доказано, что к моменту t_1 убегающий находится на расстоянии $\leqslant a\omega/2$ от одного из множеств L_i. Покажем, что тогда для всех $t \in [t_1, a]$ и $j \neq i$ выполняется неравенство $\rho(L_j, y(t)) > a\omega/2$. Через интервалы времени $\leqslant a/n$ преследователи совершают a-обходы $V_1\Gamma$. Как уже доказано, к концу каждого a-обхода убегающий должен находиться на расстоянии $\leqslant a\omega/2$ от одного из множеств L_i. Попасть из вершины одного класса в вершину другого можно, лишь пройдя по ребру длиной a и чтобы приблизиться к множеству L_j, $j \neq i$, на расстояние $\leqslant a\omega/2$, убегающий должен пройти расстояние, не меньшее

$$a - a\omega/2 = a\left(1 - \frac{2(2n(p+1))}{3(2n)^{m+1}(p+1)}\right) =$$
$$= a\left(1 - \frac{2}{3}\frac{1}{(2n)^m}\right) > a/n \qquad (\text{так как } n \geqslant 2,\ m \geqslant 1),$$

но он не успевает пройти такое расстояние за время $\leqslant a/n$.

Поэтому на интервале $[t_1, a]$ убегающий не может приблизиться на расстояние $\leqslant a\omega/2$ к разным классам эквивалентности и, следовательно, к концу каждого a-обхода графа $V_1\Gamma$ убегающий находится на расстоянии $\leqslant a\omega/2$ от вершин одного и того же класса. Назовем этот класс эквивалентности L_q. Пусть $\tilde{t}_1$ — начало ωa-обхода $V_1\mathbf{L}_q$ преследователями. В момент $\tilde{t}_1$ преследователи также заканчивают очередной a-обход $V_1\Gamma$ и $\rho(y(\tilde{t}_1), L_q) \leqslant a\omega/2$. Покажем, что если к моменту $\tilde{t}_i$, $i \in \overline{1, l-1}$, началу $\omega^i a$-обхода $V_1\mathbf{L}_q$ убегающий находился на расстоянии $\leqslant a\omega^i/2$ от L_q, то к концу этого обхода, к моменту $\tilde{t}_{i+1} = \tilde{t}_i + a\omega^{i+1}/2$ он может находиться лишь на расстоянии, не превышающем $a\omega^{i+1}/2$ от $\mathbf{L}_q$.

Убегающий к моменту $\tilde{t}_i$ находится на расстоянии $a\omega^i/2$ от L_q и за время $\tilde{t}_{i+1} - \tilde{t}_i$ не может удалиться от $\mathbf{L}_q$ на расстояние, большее $(\omega^i/2 + \omega^{i+1}/2)a < (\omega^i/2 + \omega^i/2)a = \omega^i a$ и для всех $t \in [\tilde{t}_i, \tilde{t}_{i+1}]$ выполнено неравенство $\rho(y(t), L_q) \leqslant a\omega^i$. Но с $\tilde{t}_i$ по $\tilde{t}_{i+1}$ преследователи совершают $\omega^i a$-обход $V_1\mathbf{L}_q$ и убегающий с $\tilde{t}_i$ по $\tilde{t}_{i+1}$ обязан побывать в одной из вершин $V_1\mathbf{L}_q$ (если убегающий находится на одном ребре на расстоянии, не превосходящем $\omega^i a$ от одной из вершин $V_1\mathbf{L}_q$, то он не сможет уклониться от встречи с преследователями, производящими $\omega^i a$-заметание этой вершины). Но если существует $t \in [\tilde{t}_i, \tilde{t}_{i+1}]$ такой, что $y(t) \in V_1\mathbf{L}_q$, то за время $\tilde{t}_{i+1} - t \leqslant t_{i+1} - \tilde{t}_i$ убегающий не сможет отойти от L_q на расстояние, большее $2n(p+1)\mu^{-1}\omega^i a$. Тем самым

$$\rho(y(\tilde{t}_l), L_q) \leqslant a\omega^{l+1}/2 \leqslant a'/3(2n)^m < a'/2n \quad (\text{так как } m \geqslant 1).$$

С момента $\tilde{t}_l$ по $\tilde{t}_l + a'/2n$ преследователи проходят по траекториям

$$\Pi_{\mathbf{L}_q}(x(t_1), x(t_2)), \quad t \in [\tilde{t}_l, \tilde{t}_l + a'/2n].$$

За время $a'/2n$ убегающий не может пройти расстояние, большее $a'/2n$, и так как $a'/2n + a'/2n = a'/n$, то $y(t) \in \mathbf{L}_q$, $t \in [\tilde{t}_l, \tilde{t}_l + a'/2n]$. Но это означает, что убегающий не может уклониться от встречи с преследователями. Достигнутое противоречие показывает, что указанная программа является выигрывающей на $[0, a]$, кроме того,

$$x_1(0) = x_2(0) = x_1(a) = x_2(a) \in V_1\Gamma,$$

т. е. программа удовлетворяет условиям утверждения, и теорема доказана.

3. Из теоремы 1 сразу следует

Теорема 2. *Для любого графа* Γ_0 *величина* $\mu^*(\Gamma_0) = \sup_{\Gamma \in W(\Gamma_0)} \gamma(\Gamma)$ *конечна.*

Доказательство. Число $m = |f(\Gamma)|$ не превосходит $|E\Gamma_0|$, $\Gamma \in W(\Gamma_0)$. Поэтому $\mu^*(\Gamma_0) \leqslant 3(2n)^{|E\Gamma_0|}(p+1)$, где $p = \Delta(\Gamma_0)$, $n = |V_1\Gamma_0|$.

SUMMARY

F. V. Fomin. Search problem in graphs under a restriction on the velocity.

Existence of succesful searching strategy by two pursuers is proved in a search problem.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Петров Н. Н.* Некоторые экстремальные задачи поиска на графах// Диф. уравнения. 1982. Т. 18, N 5. С. 821 – 829.
2. *Петров Н. Н.* Задачи преследования при отсутствии информации об убегающем// Диф. уравнения. 1982. Т. 18, N 8. С.1345 – 1352.
3. *Петров Н. Н., Старостина С. А.* Минимальные графы с поисковым числом, меньшим четырех.// Вестн. Ленингр. ун-та. Сер. 1. 1989. Вып. 3. (N 15). С. 105 – 106.
4. *Parsons T. D.* Persuit-evasion in a graph//Lecture Notes in Math. 1978. Vol. 642. P. 426 – 447.

Статья поступила в редакцию 28 сентября 1993 г.