ISSN 0132—4624
ISSN 0024—0850

ВЕСТНИК САНКТ-ПЕТЕРБУРГСКОГО УНИВЕРСИТЕТА '95

серия 1 МАТЕМАТИКА МЕХАНИКА АСТРОНОМИЯ выпуск 3

УДК 517.977

Вестник СПбГУ. Сер. 1, 1995, вып. 3 (№ 15)

Ф. В. Фомин

ПОИСК НА 3-МИНИМАЛЬНЫХ ДЕРЕВЬЯХ

В работах [1–2] изучался вопрос о минимальном числе преследователей, необходимом для успешного завершения поиска убегающего на конечном связном топологическом графе Г в предположении, что максимальная скорость преследователей равна μ, а скорость убегающего не превосходит единицы. Это число обозначалось через $S_\mu(\Gamma)$. В работе [2], в которой дается точная постановка задачи, было показано, что для всякого топологического дерева Г при $\mu \leqslant 1$ число $S_\mu(\Gamma)$ совпадает с комбинаторным инвариантом — поисковым числом дерева Г, откуда следует существование эффективного алгоритма для его вычисления (см. [3]). При $\mu > 1$ нахождение S_μ для деревьев значительно осложняется. Основной причиной этого является зависимость минимального числа преследователей не только от комбинаторной схемы графа, но и от длин ребер.

Рассмотрим 3-минимальное дерево (подробную информацию о k-минимальных графах можно получить в работах [4–5]), т. е. дерево с четырьмя вершинами степени три: O, A_1, A_2, A_3 и шестью вершинами степени один: B_1, C_1, B_2, C_2, B_3, C_3, причем для каждого $i \in \overline{1,3}$ вершина A_i смежна вершине O, а вершины B_i, C_i — вершине A_i. Через $\mathfrak{G}$ обозначим множество всех 3-минимальных топологических деревьев.

Пусть Г — топологическое дерево. Введем в Г метрику. Через $\rho(A, B)$, $A, B \in \Gamma$, обозначим длину кратчайшего пути (по евклидовой норме) с концами A и B, целиком лежащего на Г. Далее, для определенности, мы будем считать, что длины ребер $[O, A_1]$, $[O, A_2]$ и $[O, A_3]$ топологического 3-минимального дерева удовлетворяют неравенствам

$$\rho(O, A_1) \leqslant \rho(O, A_2) \leqslant \rho(O, A_3).$$

Обозначим через $\mathfrak{G}'$ множество всех топологических 3-минимальных деревьев, длины ребер которых удовлетворяют неравенству

$$\max\{\rho(B_1, A_1),\ \rho(C_1, A_1)\} \leqslant \rho(O, A_1).$$

Мы покажем, что для всякого графа $\Gamma \in \mathfrak{G}'$ выполнено соотношение

$$S_\mu(\Gamma) = \begin{cases} 3, & \text{если} \quad \mu < 1 + \frac{2\rho(O,A_1)}{\rho(O,A_2)+\rho(O,A_3)}, \\ 2, & \text{если} \quad \mu \geqslant 1 + \frac{2\rho(O,A_1)}{\rho(O,A_2)+\rho(O,A_3)}. \end{cases}$$

Доказательство этого факта вытекает из следующих теорем:

Теорема 1. *Если*

$$\mu \geqslant 1 + \frac{2\rho(O, A_1)}{\rho(O, A_2) + \rho(O, A_3)}, \tag{1}$$

то на всяком топологическом графе $\Gamma \in \mathfrak{G}'$ существует выигрывающая программа двух преследователей.

Теорема 2. *На всяком графе* $\Gamma \in \mathfrak{G}$ *при*

$$\mu < 1 + \frac{2\rho(O, A_1)}{\rho(O, A_2) + \rho(O, A_3)} \tag{2}$$

не существует выигрывающей программы двух преследователей.

Определим следующие понятия. Пусть $\Pi\{x_1(t), x_2(t)\}$, $t \in [0, T]$, программа двух преследователей P_1 и P_2 на топологическом графе Γ. Для каждого $\tau \in [0, T]$ введем в рассмотрение множество достижимости $F(\Pi, \tau) = \{p \in \Gamma$: *существует траектория убегающего* E $y(t)$, $t \in [0, \tau]$, *обладающая свойствами:* $y(t) \notin \{x_1(t) \cup x_2(t)\}$, *для* $t \in [0, \tau]$ *и* $y(\tau) = p\}$.

Будем говорить, что подмножество Q графа Γ является очищенным в момент времени τ, если $Q \cap F(\Pi, \tau) = \varnothing$.

Теорему 1 мы докажем, указав выигрывающую программу преследователей. Введем некоторые обозначения. Запись

$$P_1 : X_1 \to Y_1,$$
$$P_2 : X_2 \xrightarrow[i]{} Y_2$$

означает, что с момента t_i по t_{i+1} игрок P_j, $j \in \overline{1,2}$, стоит в точке X_j, если $\rho(X_j, Y_j) = 0$, и переходит из X_j в Y_j с максимальной скоростью в противном случае.

Доказательство теоремы 1. Рассмотрим произвольный топологический граф $\Gamma \in \mathfrak{G}'$ и μ, удовлетворяющее условию (1). Опишем программу преследователей на Γ и покажем, что эта программа является выигрывающей. При описании программы удобно полагать, что для длин висячих ребер графа Γ выполнены равенства

$$\rho(B_1, A_1) = \rho(C_1, A_1) = \rho(O, A_1),$$
$$\rho(B_2, A_2) = \rho(C_2, A_2) = \rho(B_3, A_3) = \rho(C_3, A_3).$$

Нетрудно показать, что увеличение длин висячих ребер "не идет преследователям на пользу", а потому, если на произвольном графе, длины ребер которого удовлетворяют указанным равенствам, существует выигрывающая программа, то и на произвольном графе, длины ребер которого удовлетворяют условию теоремы, существует выигрывающая программа.

На ребрах $[O, A_2]$, $[O, A_3]$ отметим такие точки $\hat{A}_2$ и $\hat{A}_3$, что $\rho(O, \hat{A}_2) = \rho(O, \hat{A}_3) = \rho(O, A_1)$. Положим $t_1 = 0$ и определим следующие маршруты преследователей:

$$P_1 : B_3 \to A_3 \to O \to A_1 \to A_1 \to A_1 \to B_1 \to A_1 \to C_1 \to A_1 \to A_1 \to O \to A_2 \to C_2,$$
$$P_2 : C_3 \xrightarrow[1]{} A_3 \xrightarrow[2]{} O \xrightarrow[3]{} \hat{A}_2 \xrightarrow[4]{} A_2 \xrightarrow[5]{} \hat{A}_2 \xrightarrow[6]{} O \xrightarrow[7]{} A_1 \xrightarrow[8]{} O \xrightarrow[9]{} \hat{A}_3 \xrightarrow[10]{} A_3 \xrightarrow[11]{} O \xrightarrow[12]{} A_2 \xrightarrow[13]{} B_2.$$

Покажем, что к моменту времени $T = t_{14}$ граф Γ будет очищен. Рассмотрим множества $S_i = [A_i, B_i] \cup [A_i, C_i]$, $i \in \overline{1,3}$, и множество $S = S_1 \cup S_3$. Убедимся, что если в момент времени t_{11} (в момент времени t_{11} игрок P_1 стоит в A_1, игрок P_2 в A_3) выполнено включение $G(\Pi, t_{11}) \supseteq S$, то в момент T граф Γ будет очищен.

Определим для $t \in [0, T]$, $i \in \overline{1,3}$, множество $\delta(S_i, t)$ как замыкание (в топологии $\mathbb{R}^3$) множества $\delta^\circ(S_i, t) = \{x \in \Gamma$:*найдется такая точка* $y \in S_i$, *что на ломаной* $[x, y] \subset \Gamma$ *в момент времени* t *нет ни одного преследователя*$\}$ и множество $\delta(S, t) = \delta(S_1, t) \cup \delta(S_3, t)$.

С момента t_{11} по T преследователи движутся таким образом, что если в момент времени $t' \geqslant t_{11}$ убегающий отсутствует на множестве $\delta(S, t')$, то попасть на множество $\delta(S,t'')$, $t'' > t'$, игрок E может только встретив на протяжении $[t',t'']$ преследователя. В момент времени T выполняется равенство $\delta(S,T) = \Gamma$ и из предположения $S \subseteq G(\mathrm{II}, t_{11})$ следует, что в момент T граф Γ будет очищен.

Покажем, что к моменту t_{11} множество S очищено. Предположим противное — существование траектории убегающего $y(t)$, $t \in [0,T]$, обеспечивающей уклонение от встречи с преследователями и такой, что $y(t_{11}) \in S$. Очевидно, что к моменту времени t_5 множество $\delta(S_3,t_5) = S_3 \cup [A_3,O] \cup [O,A_1] \cup [O,A_2]$ очищено, а потому $y(t_5) \notin \delta(S_3,t_5)$, и в момент t_5 убегающий может находиться или на S_1 или на S_2.

Предположим $y(t_5) \in S_1$. До момента t_6 игрок P_1 стоит в вершине A_1, и таким образом $y(t_6) \in S_1$. В момент времени t_7 в вершину O заходит игрок P_2, а поскольку за время $t_7 - t_6 = \rho(O,A_1)\mu^{-1}$ убегающему не пройти ребро $[O,A_1]$ целиком (скорость убегающего не превосходит по модулю единицы), то $y(t_7) \in S_1 \cup [O,A_1]$. С момента времени t_7 по t_8 преследователь P_1 переходит из B_1 в A_1, а преследователь P_2 переходит из O в A_1, (по условию длины ребер $[O,A_1]$ и $[B_1,A_1]$ равны), и к моменту t_8 игрок E может находиться лишь на ребре $[C_1,A_1]$. Находясь же на ребре $[C_1,A_1]$, убегающий не может уклониться от встречи с преследователем P_1, переходящим с t_8 по t_9 из A_1 в C_1 .

По предположению траектория убегающего обеспечивает уклонение, и следовательно $y(t_5) \in S_2$. В момент времени t_{11} в вершине A_3 находится преследователь P_2 и если $y(t_{11}) \in S_3$, то игрок E должен пройти за промежуток времени

$$\Delta = t_{11} - t_5 = [2\rho(O,A_1) + \rho(O,A_2) + \rho(O,A_3)]\mu^{-1}$$

расстояние, большее $\rho(A_2,A_3) = \rho(O,A_2) + \rho(O,A_3)$. По условию теоремы

$$\mu \geqslant 1 + \frac{2\rho(O,A_1)}{\rho(O,A_2) + \rho(O,A_3)},$$

откуда

$$\Delta \leqslant \rho(O,A_2) + \rho(O,A_3) = \rho(A_2,A_3).$$

Но за время $\Delta = \rho(A_2,A_3)$ пройти расстояние, большее $\rho(A_2,A_3)$ убегающий не может, а потому из $y(t_5) \in S_2$ следует $y(t_{11}) \notin S_3$.

Убедимся, что $y(t_{11})$ не принадлежит и множеству S_1. К моменту t_9 на $S_1 \cup [O,A_1]$ нет убегающего (до момента t_9 игрок E не может попасть на $S_1 \cup [O,A_1]$ не встретив игрока P_2). На протяжении $[t_{10},t_{11}]$ в вершине A_1 стоит P_1, и чтобы попасть на S_1 игрок E должен пройти вершину A_1 до того, как в нее встанет преследователь P_1 ($t_{10} - t_9 = \rho(O,A_1)\mu^{-1} = \rho(O,C_1)\mu^{-1}$), и мы получаем $\rho(O,A_1) < \rho(O,A_1)\mu^{-1}$. Из полученного неравенства вытекает неравенство $\mu < 1$.

Достигнутое противоречие ($\mu > 1$) показывает, что траектория убегающего $y(t)$, $t \in [0,t_{11}]$, $y(t_{11}) \in S$, не обеспечивает уклонение от встречи с преследователями, что, в свою очередь, завершает доказательство теоремы.

Доказательство теоремы 2. Пусть $\Gamma \in \mathfrak{G}$. Для доказательства теоремы достаточно показать, что если $\mu \in (1, 1 + \frac{2\rho(O,A_1)}{\rho(O,A_2)+\rho(O,A_3)})$, то на Γ не существует выигрывающей программы двух преследователей.

Нам понадобится вспомогательное утверждение. Рассмотрим изоморфный звезде $K_{1,3}$ топологический граф $\mathcal{K}$ с вершинами X, X_1, X_2, X_3, $\deg X = 3$, $\deg X_1 = \deg X_2 = \deg X_3 = 1$.

Лемма. *Предположим, что для программы двух преследователей* $\Pi\{x_1(t), x_2(t)\}$, $t \in [0,T]$, *для* $\mu > 1$ *действующей на* $\mathcal{K}$ *выполнены условия:*

а) $x_1(0) = x_2(0) = x_1(T) = x_2(T) = X_1$,

б) для каждого временного промежутка $(t_1, t_2) \subseteq [0,T]$, $t_2 - t_1 \geqslant 2\rho(X, X_1)\mu^{-1}$, *найдется такой момент времени* $t \in (t_1, t_2)$, *что* $x_1(t) = X_1$ *или* $x_2(t) = X_1$, *т. е. преследователи могут одновременно находиться на множестве* $L_{\mathcal{K}} = \mathcal{K} \setminus \{X_1\}$ *на протяжении* (t_1, t_2) *только при условии* $t_2 - t_1 < 2\rho(X, X_1)\mu^{-1}$.

Тогда для любой точки $M \in [X, X_1]$, $\rho(M, X) < \rho(X, X_1)\mu^{-1}$, *найдется траектория убегающего* $y(t)$, $t \in [0,T]$, *такая, что:*

а) $y(t)$ *обеспечивает уклонение от поимки,*

б) $y(0) = y(T) = \{M\}$.

Предположим, что лемма доказана. Рассмотрим на Γ произвольную программу двух преследователей $\Pi\{x_1(t), x_2(t)\}$, $t \in [0,T]$, для $\mu \in (1, 1 + \frac{2\rho(O,A_1)}{\rho(O,A_2)+\rho(O,A_3)})$. Покажем, что Π не может быть выигрывающей. Мы будем считать, что в начальный и в конечный моменты времени выполняются равенства $x_1(0) = x_2(0) = x_1(T) = x_2(T) = O$ (очевидно, что это предположение не умаляет общности).

Обозначим через Λ_i, $i \in \overline{1,3}$, следующие множества точек:

$$\Lambda_i = [B_i, A_i] \cup [C_i, A_i] \cup (O, A_i]$$

и определим

$$\theta_i = \{t \in [0,T] : \{x_1(t) \cup x_2(t)\} \subset \Lambda_i\}.$$

Для каждого $i \in \overline{1,3}$ введем в рассмотрение множество Θ_i — объединение всех компонент связности множеств θ_i по мере не меньших $2\rho(O, A_i)\mu^{-1}$.

В задаче поиска, рассматриваемой нами, траектории игроков кусочно-аффинные (см. [1,2]) и, следовательно, существует такое конечное разбиение отрезка $[0,T]$

$$0 < t_1^- < t_1^+ < \dots < t_k^- < t_k^+ < T,$$

что

$$\bigcup_{i=1}^{3} \Theta_i = \bigcup_{j=1}^{k} (t_j^-, t_j^+).$$

Определим $t_0^+ = 0$ и $t_{k+1}^- = T$. На ребре $[O, A_i], i \in \overline{1,3}$, на расстоянии $\rho(O, A_i)\left(1 + \frac{2\rho(O,A_1)}{\rho(O,A_2)+\rho(O,A_3)}\right)^{-1}$ от вершины A_i отметим точку A_i^*. Основываясь на определении множеств Θ_i, мы можем заключить, что для каждого $j \in \overline{1,k}$ найдутся два таких номера $i, i' \in \overline{1,3}$, что на протяжении (t_j^-, t_j^+) на ребрах $[O, A_i]$, $[O, A_{i'}]$ нет преследователей. Точки A_i^* и $A_{i'}^*$ будем называть особыми для момента времени t_j^-. Заметим, что одна из особых для момента t_j^- точек, является особой и для момента t_{j+1}^- (мы будем полагать, что для момента времени t_{k+1}^- все точки A_i^* являются особыми). Докажем существование траектории убегающего, обеспечивающей уклонение от встречи с преследователями. Для этого достаточно убедиться в истинности двух утверждений:

а) Если игрок E в момент времени $t_j^+, j \in \overline{0,k}$, находится в точке, являющейся особой для момента времени t_{j+1}^-, то он может действовать, обеспечивая уклонение от встречи с преследователями таким образом, чтобы к моменту t_{j+1}^- опять оказаться в этой же точке.

б) Если игрок E в момент времени t_j^-, $j \in \overline{1,k-1}$, находится в особой для этого момента времени точке, то к моменту времени t_j^+ он может перейти в точку, являющуюся особой для моментов времени t_j^- и t_{j+1}^-, не встретив преследователей.

Докажем вначале второе утверждение. На протяжении (t_j^-, t_j^+), $t_j^+ - t_j^- \geqslant \min\limits_{i\in\overline{1,3}} 2\mu^{-1}\rho(O, A_i)$, два преследователя находятся на одном из множеств $(O, A_i]$, и, следовательно, на ломаной, соединяющей две особые для момента времени t_j^- точки, нет преследователей. Таким образом, для доказательства утверждения достаточно показать, что за промежуток времени, не превосходящий по длительности $t_j^+ - t_j^-$, убегающий успеет перейти из одной особой точки в другую, т. е. пройти расстояние, не превосходящее $\max\{\rho(O, A_1^*) + \rho(O, A_2^*), \rho(O, A_2^*) + \rho(O, A_3^*), \rho(O, A_3^*) + \rho(O, A_1^*)\} = \rho(O, A_2^*) + \rho(O, A_3^*)$. Из определения точек A_i^* имеем:

$$\rho(O, A_2^*) + \rho(O, A_3^*) = \rho(O, A_2) - \rho(A_2, A_2^*) + \rho(O, A_3) - \rho(A_3, A_3^*) =$$
$$= (\rho(O, A_2) + \rho(O, A_3))\left(1 - \left(1 + \frac{2\rho(O, A_1)}{\rho(O, A_2) + \rho(O, A_3)}\right)^{-1}\right) =$$
$$= 2\rho(O, A_1)\left(1 + \frac{2\rho(O, A_1)}{\rho(O, A_2) + \rho(O, A_3)}\right)^{-1} \text{ и из условия (2)}$$
$$< 2\rho(O, A_1)\mu^{-1} \leqslant t_j^+ - t_j^-.$$

Полученное неравенство $\rho(O, A_2^*) + \rho(O, A_3^*) < t_j^+ - t_j^-$ доказывает второе утверждение.

Доказательство первого утверждения вытекает из леммы. Действительно, пусть в момент времени $t_j^+, j \in \overline{0,k}$, игрок E находится в особой для момента времени t_{j+1}^- точке, для определенности в A_1^*. Из определения особой точки следует, что в момент t_j^+ на множестве $\Lambda_1 = [B_1, A_1] \cup [C_1, A_1] \cup (O, A_1]$ нет преследователей. С момента времени t_j^+ по t_{j+1}^- два преследователя могут одновременно находиться на множестве Λ_1 на протяжении $[t_1, t_2] \subset [t_j^+, t_{j+1}^-]$ только если $t_2 - t_1 < 2\rho(O, A_1)\mu^{-1}$. Топологический граф, получаемый объединением ломаных $[B_1, A_1], [C_1, A_1]$ и $[O, A_1]$, изоморфен звезде $K_{1,3}$, а поскольку $\rho(A_1^*, A_1) = \rho(O, A_1)\left(1 + \frac{2\rho(O,A_1)}{\rho(O,A_2)+\rho(O,A_3)}\right)^{-1} < \rho(O, A_1)\mu^{-1}$, то, воспользовавшись леммой, мы убеждаемся в истинности первого утверждения.

Для завершения доказательства теоремы нам осталось проверить справедливость леммы.

Доказательство леммы. Рассмотрим произвольную программу $\Pi\{x_1(t), x_2(t)\}$, $t \in [0, T]$, удовлетворяющую условиям леммы, и обозначим

$$\xi = \{t \in [0, T] : x_1(t) = X \text{ или } x_2(t) = X\}.$$

Будем предполагать $\xi \neq \varnothing$, в противном случае лемма становится тривиальной.

Траектории игроков отвечают кусочно-постоянным управлениям, что означает существование конечного разбиения отрезка $[0, T]$:

$$0 < t_1^- \leqslant t_1^+ < \cdots < t_k^- \leqslant t_k^+ < T,$$

причем

$$\xi = \bigcup_{j=1}^{k} [t_i^-, t_i^+].$$

Пусть U — δ-окрестность вершины X в пространстве $\mathbb{R}^3$. Траектории игроков кусочно-аффинные и из условия б) следует существование δ, такого, что на протяжении действия программы в U находится не более одного преследователя.

Обозначим $\Xi = \{t \in [0,T] : (x_1(t) \cup x_2(t)) \subset U\}$, так, что $\xi \subset \Xi$. Нетрудно показать, что если δ достаточно мало, то множество Ξ имеет в $[0,T]$ ровно k компонент связности, причем если Ξ_1 одна из них, то для $t \in \Xi_1$ $\Pi(t) \cap U$ принадлежит объединению не более чем двух ребер $\mathcal{K}$. Потребуем также $\delta < \rho(X, X_1) - \rho(M, X)\mu$ (расстояние от точки M до X меньше $\rho(X, X_1)\mu^{-1}$, поэтому разность $\rho(X, X_1) - \rho(M, X)\mu$ положительна).

Опишем теперь траекторию убегающего $y(t)$, $t \in [0,T]$, позволяющую ему избежать встречи с преследователями. С начального момента времени игрок E начинает движение с максимальной скоростью из M в X. Очевидно, что $\rho(y(t), x_i(t)) > \delta$, $t \in [0, \rho(M, X)]$, $i \in \overline{1,2}$. Для $t \in [\rho(M,X), T - \rho(M,X)]$ положим $y(t) = X$, если $t \notin \Xi$.

Если же t принадлежит некоторой компоненте связности Ξ_1, то в момент t убегающий всегда может избежать встречи, сместившись на расстояние σ по тому ребру, которое не пересекается с множеством $\Pi(t) \cap U$.

Величину σ можно выбрать столь малой, что к моменту $t_1^* = \sup\{t, t \in \Xi_1\}$ игрок E может вернуться в X. Ясно, что такое поведение убегающего позволяет ему уклониться на промежутке $[0, T - \rho(M,X)]$, причем $y(T - \rho(M,X)) = X$. Переходя с максимальной скоростью из X в M убегающий не может встретить преследователей (если преследователь встречает убегающего в некоторый момент времени $t \in [T - \rho(M,X), T]$, то расстояние от места их встречи до точки X меньше $\rho(M,X)$, а потому преследователь не успевает попасть к моменту T в X_1). Лемма доказана.

З а м е ч а н и е. Для всякого графа $\Gamma \in \mathfrak{G}$ известно доказательство равенства $S_\mu(\Gamma) = 2$, если $\mu \geqslant \sqrt{5}$. Если же $\mu \in [1, \sqrt{5})$, то вопрос нахождения $S_\mu(\Gamma)$, $\Gamma \in \mathfrak{G}$ остается открытым.

SUMMARY

F. V. Fomin. Search in 3-minimal trees.

The graph-searching problem with restriction on velocity is investigated. Some solutions of this problem for 3-minimal trees are found.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Петров Н. Н.* // Диф. уравнения. 1982. Т. 18, №5. С. 821–829.
2. *Фомин Ф. В.* // Вестн. С.-Петербург. ун-та. Сер. 1. 1994. Вып. 3 (№17). С. 60–66.
3. *Yannakakis.* // J. of the Assoc. for Computing Machinery. 1985. Vol. 32, №4. P. 950–988.
4. *Петров Н. Н.* //Диф. уравнения. 1982. Т. 18, №8. С. 1345–1352.
5. *Megiddo N., Hakimi S. L., Garey M. R., Johnson D. S., Papadimitriou C. H.* //J. of ACM. 1988. Vol. 35. P. 18–44.

Статья поступила в редакцию 19 января 1995 г.