ISSN 0132—4624
ISSN 0024—0850

ВЕСТНИК САНКТ-ПЕТЕРБУРГСКОГО УНИВЕРСИТЕТА '97

серия 1 МАТЕМАТИКА МЕХАНИКА АСТРОНОМИЯ выпуск 2

УДК 517.977

Вестник СПбГУ. Сер. 1, 1997, вып. 2 (№ 8)

Ф. В. Фомин

ПОЧТИ ДИСКРЕТНЫЕ ПРОГРАММЫ ПОИСКА НА ГРАФАХ

Постановка задачи. В работах [1–5] исследовалась следующая задача поиска. Пусть граф Γ определяется конечным множеством вершин $V\Gamma$, множеством ребер $E\Gamma$ и отношением инцидентности, которое каждому ребру сопоставляет две вершины, называемые его концами.

Говорится, что Γ — топологический граф, если вершины Γ суть точки в $\mathbf{R}^3$, а ребра — непересекающиеся конечнозвенные ломаные с концами в соответствующих вершинах, замкнутые в $\mathbf{R}^3$.

На связном топологическом графе Γ находится n преследователей $P_1, \ldots, P_n$ и убегающий E. Предполагается, что преследователи и убегающий обладают в $\mathbf{R}^3$ (граф вложен в $\mathbf{R}^3$) простыми движениями:

$$(P_i): \quad \dot{x}_i = u_i, \quad \|u_i\| \leqslant 1, \qquad i \in \overline{1,n};$$
$$(E): \quad \dot{y} = u_0, \quad \|u_0\| \leqslant \mu,$$

причем Γ является для игроков фазовым ограничением. Допустимыми управлениями игроков являются кусочно-постоянные функции, заданные на произвольных промежутках $[0,T]$. Таким образом, допустимыми траекториями будут кусочно-аффинные вектор-функции со значениями в Γ.

Убегающий E считается *пойманным* преследователем P_i в момент $t \in [0,T]$, если $x_i(t) = y(t)$. Совокупность траекторий преследователей, заданных на промежутке $[0,T]$, называется *программой* преследователей, заданной на промежутке $[0,T]$. Программа n преследователей $\Pi(x_1, \ldots, x_n)$, заданная на $[0,T]$, называется *выигрывающей*, если для любой траектории убегающего y, заданной на $[0,T]$, существуют $t \in [0,T]$ и $i \in \overline{1,n}$, такие, что $x_i(t) = y(t)$. Будем говорить, что траектория убегающего $y(t)$, $t \in [0,T]$, обеспечивает *уклонение* от поимки для программы преследователей $\Pi(x_1, \ldots, x_n)$, действующей на $[0,T]$, если $x_i(t) \neq y(t)$, $t \in [0,T]$, $i \in \overline{1,n}$.

Требуется найти наименьшее натуральное число n, такое, что у n преследователей существует выигрывающая программа, заданная на некотором промежутке $[0,T]$. Ясно, что эта величина, обозначаемая через $S_\mu(\Gamma)$, зависит только от графа Γ и скорости убегающего μ.

Поскольку наименьшее число преследователей, необходимое для существования выигрывающей программы на графе Γ, не изменяется при изменении длин всех ребер в α раз, где α — некоторое положительное число, в дальнейшем будем полагать, что наименьшая из длин ребер графа равна единице.

При нахождении необходимых условий существования выигрывающей программы преследователей мы сталкиваемся с естественной трудностью: для доказательства того, что поимка убегающего невозможна, вообще говоря, нужно показать, что у убегающего есть возможность уклониться от всякой программы преследователей. С другой стороны, понятно, что рассмотрение всех программ вряд ли является необходимым, так как многие программы преследователей заведомо "бестолковы". В данной работе обсуждаются возможности сужения множества рассматриваемых программ. Мы покажем, что для $\mu \geqslant 1$ решение задачи поиска можно свести к рассмотрению программ, называемых нами почти дискретными.

Полученные результаты могут оказаться полезными при доказательстве необходимых условий существования выигрывающих программ.

Основные результаты. Прежде чем приступить к изложению основных результатов, дадим некоторые определения.

Пусть в момент времени t^A игрок P_i находится в точке A. Будем говорить, что момент времени t^A является моментом *выхода* игрока P_i из точки A, если найдется такое $\varepsilon > 0$, что для всех $t \in (t^A, t^A + \varepsilon]$ имеет место неравенство $x_i(t) \neq A$. Если же найдется такое $\varepsilon > 0$, что для всех $t \in [t^A - \varepsilon, t^A)$ выполняется неравенство $x_i(t) \neq A$, то будем называть t^A моментом *захода* игрока в точку A.

Если точки A и B лежат на одном ребре, то через $\rho(A, B)$ будем обозначать длину кратчайшего пути с концами A и B, целиком лежащего на этом ребре.

Будем говорить, что программа преследователей $\Pi(x_1(t), \ldots, x_n(t))$, $t \in [0, T]$, на графе Γ является *почти дискретной*, если действия преследователей в этой программе заключаются в стоянии в вершинах и переходах из вершины в вершину с максимальной скоростью. Другими словами, если в момент $t^A \in [0, T)$ игрок выходит из некоторой вершины A на ребро (A, B), то в момент времени $t^A + \rho(A, B)$ этот игрок должен зайти в вершину B.

Покажем, что для существования выигрывающей программы преследователей необходимо существование почти дискретной выигрывающей программы.

Введем понятие программы преследователей типа *"прежде чем вернуться — зайди в вершину"*, в которой преследователь, выйдя из произвольной вершины A графа Γ, может опять зайти в A лишь после захода в одну из отличных от A вершин графа.

Докажем, что для существования выигрывающей программы преследователей необходимо существование выигрывающей программы типа "прежде чем вернуться — зайди в вершину", и затем покажем как "преобразовать" выигрывающую программу типа "прежде чем вернуться — зайди в вершину" в почти дискретную выигрывающую программу.

Заметим, что факт существования выигрывающей программы не зависит от начального и конечного положения игроков. Для удобства далее везде будет предполагаться, и это не будет оговариваться, что в начальный и конечный моменты действия всякой программы преследователи находятся в вершинах графа.

Лемма. *Если на графе Γ существует выигрывающая программа, то на Γ существует выигрывающая программа типа "прежде чем вернуться — зайди в вершину".*

Доказательство. Пусть $\Pi(x_1(t), \ldots, x_n(t))$, $t \in [0, T]$ — выигрывающая программа на Γ. Предположим, что в программе Π в момент времени t^* встречаются преследователи с номерами i_1 и i_2. Введем в рассмотрение программу $\Pi^*(x_1^*(t), \ldots, x_n^*(t))$, $t \in [0, T]$, отличающуюся от Π лишь траекториями игроков P_{i_1} и P_{i_2}, а именно:

$$
\begin{aligned}
x_{i_1}^*(t) &= x_{i_1}(t), & t &\in [0, t^*]; \\
x_{i_2}^*(t) &= x_{i_2}(t), & t &\in [0, t^*]; \\
x_{i_1}^*(t) &= x_{i_2}(t), & t &\in [t^*, T]; \\
x_{i_2}^*(t) &= x_{i_1}(t), & t &\in [t^*, T].
\end{aligned}
$$

Будем говорить, что программа Π^* получена из программы Π перестановкой игроков P_{i_1} и P_{i_2} после момента времени t^*. Отметим, что программа Π^* также является выигрывающей.

Говорится, что игрок P_i в момент времени t *находится в пути из вершины A в вершину B* (A и B могут совпадать), если $x_i(t) \notin V\Gamma$, последней вершиной, из которой игрок выходил перед моментом t, была вершина A, а первой вершиной, в которую преследователь зайдет после момента t, будет вершина B.

Учитывая, что программа, получаемая из выигрывающей программы перестановкой преследователей, также является выигрывающей, нетрудно убедиться в существовании выигрывающей программы, удовлетворяющей для каждого $i \in \overline{1,n}$ следующим требованиям. Пусть игрок P_i находится в моменты времени $t_A^- < t_A^+$ в некоторой вершине A и для всякого $t \in (t_A^-, t_A^+)$ траектория i-го игрока принадлежит ребру (A, B) (т.е. игрок находится в пути из A в A). Тогда, если существует момент времени $t^* \in (t_A^-, t_A^+)$ такой, что в этот момент времени i-й игрок встречает игрока с номером i_1, то в момент времени t^*:

(A) игрок P_{i_1} не находится в пути из B в B;
(B) если игрок P_{i_1} находится в пути из B в A, то в вершину A он заходит не позднее игрока P_i;
(C) если игрок P_{i_1} находится в пути из A в A, то в вершину A первым заходит игрок, вышедший из нее последним.

Программа $\Pi^{-1}(x_1^{-1}(t), \ldots, x_n^{-1}(t))$, $t \in [0, T]$, называемая обратной к программе Π и определяемая уравнениями:

$$x_i^{-1}(t) = x_i(T - t), \qquad i \in \overline{1,n},$$

также является выигрывающей. Получив из выигрывающей программы Π^{-1} при помощи перестановок преследователей выигрывающую программу, для которой выполнено условие (B), и перейдя опять к обратной программе, получаем существование выигрывающей программы, для которой в момент времени t^* выполнено условие:

(D) если игрок P_{i_1} находится в пути из A в B, то из вершины A он выходит не раньше игрока P_i.

Далее будем предполагать (и это не умаляет общности), что траектории преследователей в программе Π удовлетворяют условиям (A)–(D).

Допустим, что программа Π не является программой типа "прежде чем вернуться — зайди в вершину". Тогда найдется такая вершина A, что в некоторый момент времени $t_1^{A^-}$ преследователь, для определенности P_1, выходит из вершины A, а в момент $t_1^{A^+}$, $t_1^{A^-} < t_1^{A^+}$, заходит в A и $x_1(t) \notin V\Gamma$, $t \in (t_1^{A^-}, t_1^{A^+})$. Ребро, инцидентное вершине A, на котором находится игрок P_1 на протяжении $(t_1^{A^-}, t_1^{A^+})$, обозначим через (A, B). Будем считать, что до момента времени $t_1^{A^-}$ никто из преследователей не находится в пути из A в A, т.е. если в некоторый момент времени $t_i^{A^-}$ преследователь с номером i выходит из вершины A, а в момент $t_i^{A^+}$, $t_i^{A^-} < t_i^{A^+}$ заходит в A, и $x_i(t) \notin V\Gamma$, $t \in (t_i^{A^-}, t_i^{A^+})$, то

$$t_i^{A^-} \geqslant t_1^{A^-}. \tag{1}$$

Ясно, что для доказательства леммы достаточно показать, что при изменении в программе Π действий первого игрока на протяжении $[t_1^{A^-}, t_1^{A^+}]$ на стояние в вершине A, программа останется выигрывающей.

Предположим противное — измененная программа $\overline{\Pi}(\bar{x}_1(t), \ldots, \bar{x}_n(t))$, $t \in [0, T]$, не является выигрывающей. Тогда существует траектория убегающего $y(t)$, $t \in [0, T]$, обеспечивающая уклонение для программы

$\overline{\Pi}$. Программа П является выигрывающей, и поскольку программы отличаются лишь поведением первого игрока на промежутке $(t_1^{A^-}, t_1^{A^+})$, то $y(t) \neq x_i(t)$ для всех $t \in [0,T]$, $i \in \overline{2,n}$, а равенство $y(t) = x_1(t)$ может достигаться лишь для $t \in \theta$, где

$$\theta = \{t \in (t_1^{A^-}, t_1^{A^+}) \colon \text{ \textit{в момент времени} } t \text{ \textit{убегающий находится на} } (A,B)\}.$$

Кусочно-аффинность траекторий игроков влечет существование такого конечного разбиения промежутка

$$(t_1^{A^-}, t_1^{A^+}) \colon t_1^{A^-} < t_1^- < t_1^+ \cdots < t_k^- < t_k^+ < t_1^{A^+},$$

что

$$\theta = \cup_{i=1}^k (t_i^-, t_i^+).$$

Пусть (t_i^-, t_i^+), $i \in \overline{1,k}$ — один из промежутков, для которых существуют моменты времени

$$t_*^- = \min\{t \in (t_i^-, t_i^+) \colon y(t) = x_1(t)\},$$
$$t_*^+ = \max\{t \in (t_i^-, t_i^+) \colon y(t) = x_1(t)\}.$$

Если показать, что при малом ε можно так изменить траекторию $y(t)$ на промежутке $[t_*^- - \varepsilon, t_*^+ + \varepsilon] \subset (t_i^-, t_i^+)$, что убегающий уклоняется от встречи с преследователями в программе П на этом промежутке, то противоречие будет достигнуто. Действительно, изменив траекторию убегающего на всех отрезках (t_i^-, t_i^+) таким образом, что убегающий уклоняется от встречи с преследователями, получим траекторию убегающего, обеспечивающую уклонение от поимки для выигрывающей программы П.

Ясно, что t_*^- и t_*^+ суть внутренние точки промежутка (t_i^-, t_i^+), и при достаточно малом $\varepsilon > 0$ выполняется включение $[t_*^- - \varepsilon, t_*^+ + \varepsilon] \subset (t_i^-, t_i^+)$, а потому убегающий на протяжении $(t_*^- - \varepsilon, t_*^+ + \varepsilon)$ находится на ребре (A,B). Покажем, что при малых ε для всех $t \in [t_*^- - \varepsilon, t_*^-) \cup (t_*^+, t_*^+ + \varepsilon]$ имеет место неравенство

$$\rho(y(t), A) > \rho(x_1(t), A). \tag{2}$$

В программе $\overline{\Pi}$ игрок P_1 на протяжении $[t_1^{A^-}, t_1^{A^+}]$ стоит в вершине A. Поскольку траектория убегающего $y(t)$ обеспечивает уклонение для программы $\overline{\Pi}$, при малых ε убегающий, чтобы оказаться в момент времени $t \in [t_*^- - \varepsilon, t_*^-)$ между A и $x_1(t)$, должен встретить игрока P_1 в программе П до момента времени t_*^-, что противоречит определению t_*^-. Для $t \in (t_*^+, t_*^+ + \varepsilon]$ выполнение неравенства (2) доказывается аналогично.

Для достаточно малых $\delta > 0$ зададим множество

$$[\theta]^{\geqslant\delta} = \{t \in [t_*^- - \varepsilon, t_*^+ + \varepsilon] \colon \rho(y(t), A) - \delta \geqslant \rho(x_1(t), A)\}.$$

Определим траекторию убегающего $\bar{y}(t)$, $t \in [t_*^- - \varepsilon, t_*^+ + \varepsilon]$:

$$\bar{y}(t) = y(t), \qquad t \in [\theta]^{\geqslant\delta};$$
$$\rho(\bar{y}(t), x_1(t)) = \delta, \qquad t \in [t_*^- - \varepsilon, t_*^+ + \varepsilon] \setminus [\theta]^{\geqslant\delta}.$$

Скорости преследователей не превосходят скорости убегающего, и потому такая траектория существует. Учитывая (2), нетрудно убедиться, что при достаточно малых δ для всех $t \in [t_*^- - \varepsilon, t_*^- - \delta] \cup [t_*^+ + \delta, t_*^+ + \varepsilon]$ имеет место равенство $\bar{y}(t) = y(t)$, а потому $\bar{y}(t)$ является непрерывной кусочно-аффинной вектор-функцией и, следовательно, является допустимой траекторией убегающего. Из определения траектории $\bar{y}(t)$ вытекает, что на всем промежутке $[t_*^- - \varepsilon, t_*^+ + \varepsilon]$ убегающий, совершающий движение по этой траектории, уклоняется от встречи с первым преследователем в программе П. Покажем, что убегающий, совершающий движение по измененной траектории $\bar{y}$, может встретить на протяжении $[t_*^- - \varepsilon, t_*^+ + \varepsilon]$ преследователя в программе П только тогда, когда траектория y не обеспечивает уклонения для программы $\overline{\Pi}$, где δ достаточно мало.

Траектории игроков кусочно-аффинные, следовательно, при достаточно малых $\delta > 0$, сблизившись на расстояние $\leqslant \delta$, преследователи могут изменить скорость только после встречи друг с другом. Предположим, что в некоторый момент времени $t^* \in [t_*^- - \varepsilon, t_*^+ + \varepsilon]$ убегающий, совершающий движение по измененной траектории, встречает преследователя, для определенности P_2. Заметим, что после момента t^* преследователь P_2 должен встретиться с P_1.

Если игрок P_2 в момент времени t^* находится в пути из вершины B, то, учитывая, что игрок обязан встретить игрока P_1, можно сослаться на условие (A) и заключить, что преследователь находится в пути из B в A. В силу определения траектории $\bar{y}(t)$ для всех $t \in [t_*^- - \varepsilon, t_*^+ + \varepsilon]$ имеет место неравенство

$$\rho(y(t), A) \leqslant \rho(\bar{y}(t), A), \tag{3}$$

и, следовательно, точка $y(t^*)$ принадлежит отрезку $[A, x_2(t^*)]$. Из условия (B) вытекает, что в программе $\overline{\Pi}$ игрок P_2 зайдет в A не позже момента выхода игрока P_1 из этой вершины. В таком случае траектория y не может обеспечивать уклонение для программы $\overline{\Pi}$.

Предположим, что игрок P_2 в момент времени t^* находится в пути из вершины A. Обозначим через t_2^{A-} момент выхода второго игрока из вершины A. Если преследователь P_2 находится в пути из вершины A в A, то по определению момента t_1^{A-} имеет место неравенство (1). Из условия (C) вытекает, что в момент захода игрока P_2 в A игрок P_1 в программе $\overline{\Pi}$ стоит в вершине A. Воспользовавшись неравенством (3), заключаем, что и в этом случае траектория y не обеспечивает уклонение для программы $\overline{\Pi}$. Если же игрок P_2 находится в пути из вершины A в B, то по условию (D) $t_2^{A-} \geqslant t_1^{A-}$, и, следовательно, $\bar{x}_1(t_2^{A-}) = \bar{x}_2(t_2^{A-})$. Тогда убегающий, оказавшись в момент времени $t^* > t_2^{A-}$ между точками $A = \bar{x}_1(t^*)$ и $\bar{x}_2(t^*)$, не может не встретить до момента t^* в программе $\overline{\Pi}$ преследователей.

Предположив существование момента времени t^*, мы показали, что траектория y не обеспечивает уклонение для программы $\overline{\Pi}$. Последнее же противоречит предположению о свойствах траектории y, и лемма доказана. ■

Приступим к доказательству основного утверждения данной работы.

Теорема. *Если на графе* Γ *существует выигрывающая программа, то на графе* Γ *существует и почти дискретная выигрывающая программа.*

Доказательство. Пусть $\Pi(x_1(t), \ldots, x_n(t))$, $t \in [0, T]$ — выигрывающая программа на графе Γ. В силу леммы, не умаляя общности, можно полагать, что программа П является программой типа "прежде чем вернуться — зайди в вершину". Предположим, что П не является почти дискретной программой. Тогда найдутся ребро (A, B) и моменты времени $t \in [0, T)$, удовлетворяющие условию:

- Найдется номер $i \in \overline{1, n}$ такой, что t является моментом выхода игрока P_i на ребро (A, B) из вершины A, причем время прохождения игроком ребра (A, B) строго больше длины этого ребра.

Пусть t_- — наименьший из таких моментов. Для определенности будем считать, что в момент времени t_- из вершины A выходит игрок P_1. Пусть

t_+ — момент захода игрока в вершину B. Таким образом, $x_1(t_-) = A$, $x_1(t_+) = B$, $t_+ - t_- > \rho(A, B)$, и для всех $t \in (t_-, t_+)$ $x_1(t) \in (A, B)$.

Рассмотрим программу $\overline{\Pi}(\bar{x}_1(t), \ldots, \bar{x}_n(t))$, $t \in [0, T]$, отличающуюся от программы Π лишь поведением игрока P_1 на промежутке $[t_-, t_+]$, а именно:

$$\begin{aligned} \bar{x}_1(t) &= A, \qquad t \in (t^-, t^+ - \rho(A, B)], \\ \left|\frac{d\bar{x}_1(t)}{dt}\right| &= 1, \qquad t \in [t^+ - \rho(A, B), t^+), \\ \bar{x}_1(t^+) &= B. \end{aligned}$$

Для доказательства теоремы достаточно показать, что измененная программа будет выигрывающей. Действительно, выбрав одно из ребер графа Γ и последовательно изменяя указанным выше способом действия преследователей на этом ребре, за конечное число изменений (траектории игроков кусочно-аффинные) получим программу, в которой преследователи проходят это ребро с максимальной скоростью. Число ребер графа конечно, и, изменив программу для каждого ребра, получим почти дискретную программу.

Предположим, что программа $\overline{\Pi}$ не является выигрывающей программой. Обозначим через $y(t)$, $t \in [0, T]$, траекторию убегающего, обеспечивающую уклонение для программы $\overline{\Pi}$. Программа Π по предположению выигрывающая, а потому убегающий, совершающий движение по траектории y, должен встретить в программе Π хотя бы одного преследователя. Поскольку программы $\overline{\Pi}$ и Π отличаются лишь поведением игрока P_1 на промежутке $[t_-, t_+]$, то убегающий встречает в программе Π только игрока P_1. Определим τ^- и τ^+ как наименьший и наибольший из моментов встреч убегающим преследователя. Очевидно, что $[\tau^-, \tau^+] \subset (t_-, t_+)$, а потому точки $y(\tau^-)$, $y(\tau_+)$ являются внутренними точками ребра (A, B). Для простоты мы будем полагать, что на протяжении $[\tau^-, \tau^+]$ убегающий не покидает ребра (A, B) (если убегающий покидает ребро, то рассуждения, приведенные ниже, должны проводиться для каждого временного интервала, на протяжении которого убегающий находится на ребре (A, B)).

Мы покажем, что из существования траектории y, обеспечивающей уклонение для программы $\overline{\Pi}$, вытекает возможность такого изменения траектории убегающего при достаточно малом $\varepsilon > 0$ на отрезке $[\tau^- - \varepsilon, \tau^+ + \varepsilon] \subset (t_-, t_+)$, что измененная траектория $\bar{y}$ обеспечивает уклонение для программы Π. Полученное противоречие завершит доказательство теоремы.

Приступим к построению траектории $\bar{y}$. Покажем сперва, что при малых ε выполняются неравенства

$$\begin{aligned} \rho(x_1(\tau^- - \varepsilon), A) &< \rho(y(\tau^- - \varepsilon), A), \\ \rho(x_1(\tau^+ + \varepsilon), A) &< \rho(y(\tau^+ + \varepsilon), A). \end{aligned}$$

Убедимся в истинности первого неравенства (второе неравенство доказывается аналогично). Если убегающий попадает на (A, B) через вершину B, то оказаться в момент $\tau^- - \varepsilon$ между вершиной A и игроком P_1, идущим из A в B, он может лишь столкнувшись с P_1 до момента τ^-, что противоречит определению этого момента. Предположим, что убегающий попадает на (A, B) через вершину A. Если в момент выхода убегающего из вершины A на ребре (A, B) еще нет преследователя P_1, то неравенство выполняется. Если же в момент t_1 на ребре (A, B) есть преследователь P_1, то, поскольку траектория y обеспечивает уклонение для программы $\overline{\Pi}$, для всех $t \in [t_-, \tau^-]$ выполняется неравенство $\rho(y(t), A) < \rho(\overline{x}_1(t), A)$. С другой стороны, из определения программы $\overline{\Pi}$ следует, что $\rho(\overline{x}_1(t), A) \leqslant \rho(x_1(t), A)$ для всех $t \in [t_-, \tau^-]$. Таким образом, $\rho(y(\tau^-), A) < \rho(x_1(\tau^-), A)$, что противоречит предположению $y(\tau^-) = x_1(\tau^-)$. Второе неравенство доказывается аналогично.

Из доказанных неравенств следует, что при малых δ множество

$$[\theta]^{\geqslant\delta} = \{t \in [\tau^- - \varepsilon, \tau^+ + \varepsilon] \colon \rho(y(t), A) - \delta \geqslant \rho(x_1(t), A)\}$$

не пусто. Как и в лемме, нетрудно убедиться, что при малых δ траектория убегающего $\bar{y}(t)$, $t[0, T]$, определяемая уравнениями

$$\begin{aligned} \bar{y}(t) = y(t), \qquad & t \in [0, \tau^- - \varepsilon] \cup [\theta]^{\geqslant\delta} \cup [\tau^+ + \varepsilon, T], \\ \rho(\bar{y}(t), x_1(t)) = \delta, \qquad & t \in [\tau^- - \varepsilon, \tau^+ + \varepsilon] \setminus [\theta]^{\geqslant\delta}, \end{aligned}$$

является допустимой траекторией убегающего.

По предположению, программа Π является выигрывающей, а потому траектория $\bar{y}$ не обеспечивает уклонение. Траектория $\bar{y}$ строилась таким образом, что убегающий, совершающий движение по этой траектории, обеспечивает уклонение от встречи с первым преследователем в программе Π. Следовательно, убегающий встречает преследователя, отличного от P_1, для определенности P_2, причем их встреча должна происходить на ребре (A, B).

Игрок P_2 должен идти из вершины A в B, поскольку, если второй преследователь идет из B в A, то в программе $\overline{\Pi}$ убегающий оказывается между игроками P_1 и P_2, идущими навстречу друг другу, и не может уклониться от встречи с одним из преследователей. Отметим также, что в момент времени $\tau^- - \varepsilon$ убегающий находится к вершине A ближе, чем игрок P_2. Действительно, для всех $t \in [\tau^- - \varepsilon, \tau^+ + \varepsilon]$ выполнено условие $\rho(A, y(t)) < \rho(A, \bar{y}(t))$, и, так как траектория y обеспечивает уклонение от встречи с игроком P_2, неравенство $\rho(A, y(\tau^- - \varepsilon)) = \rho(A, \bar{y}(\tau^- - \varepsilon)) > \rho(A, x_2(\tau^- - \varepsilon))$ влечет выполнение $\rho(A, \bar{y}(t)) > \rho(A, x_2(t))$ на всем отрезке $[\tau^- - \varepsilon, \tau^+ + \varepsilon]$.

Итак, мы доказали, что $\rho(A, x_1(\tau^- - \varepsilon)) < \rho(A, \bar{y}(\tau^- - \varepsilon)) = \rho(A, y(\tau^- - \varepsilon)) < \rho(A, x_2(\tau^- - \varepsilon))$. Если игрок P_2 выходит из вершины A раньше игрока P_1, то из определения момента t_- вытекает, что второй преследователь идет в B с максимальной скоростью. Но тогда для всех $t \in [\tau^- - \varepsilon, \tau^+ + \varepsilon]$ выполняется условие $\rho(A, x_1(t)) < \rho(A, x_2(t))$, и при малых δ убегающий, совершающий движение по траектории $\bar{y}$, уклонится от встречи и со вторым игроком. Если же игрок P_2 выходит из A не раньше игрока P_1, то в некоторый момент времени $t^* \in [t_-, \tau^- - \varepsilon)$ их траектории должны пересекаться. Но тогда убегающий, совершающий движение по траектории y, может в момент времени $\tau^- - \varepsilon$ оказаться между игроками P_1 и P_2, идущими из A в B, только встретив одного из игроков до момента $\tau^- - \varepsilon$. По определению момента τ^- убегающий не может встретить первого преследователя до этого момента, а потому он встречает в программе Π второго игрока. Последнее же противоречит предположению о свойствах траектории y (предполагалось, что данная траектория обеспечивает уклонение для программы $\overline{\Pi}$, отличающейся от программы Π лишь действиями первого игрока).■

Автор глубоко признателен своему научному руководителю Н. Н. Петрову за многократные обсуждения данной работы, позволившие значительно упростить доказательство теоремы.

SUMMARY

Fomin F. V. Almost discrete search programs on graphs.

We discuss a pursuit-evasion game which is played on a topological graph where a team of pursuers tries to catch an evader who is "invisible" for them, all players making use of "simple motions" with fixed maximal speeds and the topological graph being a phase restraint for their trajectories. Is discussed. It is supposed that pursuers' speed is at most the speed of the evader. It is proved that if pursuers can catch the evader then they can do it in an almost discrete manner.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Петров Н. Н.* Некоторые экстремальные задачи поиска на графах // Дифф. уравнения. 1982. Т. 18, № 5. С. 821–827.
2. *Петров Н. Н.* Задачи преследования на одномерном остове куба // Дифф. уравнения. 1987. Т. 23, № 5. С. 908–911.
3. *Фомин Ф. В.* Задача поиска на графах с ограничением скорости // Вестн. С.-Петербург. ун-та. Сер. 1. 1994. Вып. 3 (№ 15). С. 60–66.
4. *Фомин Ф. В.* Задача поиска на деревьях // Вестн. С.-Петербург. ун-та. Сер. 1. 1995. Вып. 2 (№ 8). С. 36–41.
5. *Фомин Ф. В.* Поиск на 3-минимальных деревьях // Вестн. С.-Петербург. ун-та. Сер. 1. 1995. Вып. 3 (№ 15). С. 67–72.

Статья поступила в редакцию 9 апреля 1996 г.