ISSN 0132-4624
ISSN 0024-0850

ВЕСТНИК САНКТ-ПЕТЕРБУРГСКОГО УНИВЕРСИТЕТА '99

серия 1 МАТЕМАТИКА МЕХАНИКА АСТРОНОМИЯ

выпуск 2

УДК 519.717 Вестник СПбГУ. Сер. 1, 1999, вып. 2 (№ 8)

П. А. Головач, Ф. В. Фомин

О ДОПОЛНЕНИИ ДО ГРАФА ИНТЕРВАЛОВ С НАИМЕНЬШЕЙ МАКСИМАЛЬНОЙ СТЕПЕНЬЮ

Постановка задачи. В настоящее время известно и активно изучается целое семейство численных характеристик графов, определяемых с помощью оптимальных (по различным критериям) нумераций вершин графа, а также некоторых других задач оптимизации, которые можно определить с помощью графов интервалов. К таким инвариантам относятся, например, величина вершинного разделения или путевая ширина (см. обзор [1]). Эти величины можно ввести с помощью так называемой интервальной толщины (см. [2]).

Пусть G — некоторый граф. Обозначим через $c(G)$ кликовое число этого графа (максимальное число вершин в полном подграфе G). Интервальная толщина графа G, обозначаемая через $\Theta(G)$, это $\min\{c(G')\colon G'$ — граф интервалов, содержащий G в качестве подграфа$\}$. Известно, что $vs(G) = pw(G) = \Theta(G) - 1$, где $vs(G)$ — величина вершинного разделения, а $pw(G)$ — путевая ширина графа. Другим примером может служить профиль графа (см. обзор [3]). Известно (см. [4, 5]), что профиль графа совпадает с минимальным числом ребер в графе интервалов, подграфом которого является данный граф. Нетрудно показать, что подобным же образом можно охарактеризовать ширину ленты графа (см. [3]).

Нам представляется интересным рассмотрение еще одной численной характеристики графов, определяемой с использованием графов интервалов, которую мы назвали интервальной степенью графа.

Пусть $G = (V, E)$ — некоторый граф. Отметим сразу, что в данной работе будут рассматриваться только простые графы. Через $deg(v)$ будет обозначаться степень вершины v, а через $\Delta(G)$ — максимальная степень вершины графа G. Напомним, что граф называется графом интервалов, если его можно описать как граф, множество вершин которого — это совокупность интервалов действительной прямой, и две вершины являются смежными тогда и только тогда, когда два соответствующих интервала пересекаются. *Интервальной степенью графа* мы называем величину $id(G) = \min\{\Delta(G')\colon G'$ — граф интервалов, содержащий в качестве подграфа $G\}$.

Интервальная степень и оптимальные нумерации вершин. В этой части мы рассмотрим связь введенного нами инварианта с некоторой задачей выбора оптимальной нумерации вершин графа. Это представляется вполне естественным, поскольку упомянутые выше численные характеристики графов (величина вершинного разделения, профиль, ширина ленты) вводятся именно с помощью таких задач оптимизации.

Пусть $G = (V, E)$ — граф с n вершинами. *Нумерацией вершин* графа G называется взаимно однозначное отображение $f\colon V \to \{1, 2, \dots, n\}$.

Приведем в качестве примера задач выбора оптимальных (по различным критериям) нумераций вершин задачи, с помощью которых определяются величина вершинного разделения и ширина ленты графа.

Пусть f — некоторая нумерация вершин графа G. Обозначим через $S_i(G, f)$, где $i \in \overline{1, n}$, величину $|\{v \in V\colon f(v) \leq i$ и существует $(u, v) \in E$, для которого $f(u) > i\}|$. Положим $vs(G, f) = \max\{S_i(G, f)\colon i \in \overline{1, n}\}$. *Величиной вершинного разделения* графа G называется $\min\{vs(G, f)\colon f$ — нумерация вершин $G\}$. Обозначается эта величина через $vs(G)$. Определим теперь ширину ленты графа G. Положим $bw(G, f) = \max\{|f(u) - f(v)|\colon (u, v) \in E\}$, где f — нумерация вершин графа G. *Шириной ленты* графа G называется величина $\min\{bw(G, f)\colon f$ — нумерация вершин $G\}$.

© П. А. Головач, Ф. В. Фомин, 1999

Оказалось, что задача вычисления интервальной степени графа эквивалентна задаче, являющейся "гибридом" упомянутых задач.

Если $u, v \in V$, то будем писать, что $u \cong v$ в том случае, когда либо $u = v$, либо $(u, v) \in E$. Пусть f — нумерация вершин графа G. Обозначим через $S_i^*(G, f)$, где $i \in \overline{1,n}$, величину $|\{v \in V: f(v) < i$ и существует $(u, v) \in E$, для которого $f(u) \geqslant i\}|$. Положим $W_i(G, f) = \max\{j - i: j \in \overline{i,n}, f^{-1}(i) \cong f^{-1}(j)\}$. Обозначим через $sw(G, f)$ величину $\max\{S_i^*(G, f) + W_i(G, f): i \in \overline{1,n}\}$, а через $sw(G)$ — $\min\{sw(G): f$ — нумерацию вершин $G\}$.

Связь поставленной нами задачи с задачей, с помощью которой определялась величина вершинного разделения графа, вытекает из того, что $S_i^*(G, f) = S_{i-1}(G, f)$ при $i \in \overline{1,n}$ (мы считаем, что $S_0(G, f) = 0$). Таким образом, $vs(G, f) = \max\{S_i(G, f): i \in \overline{1,n}\} = \max\{S_{i-1}(G, f): i \in \overline{1,n}\} = \max\{S_i^*(G, f): i \in \overline{1,n}\}$. Для выявления связи с задачей, с использованием которой вводилась ширина ленты графа, достаточно заметить, что $bw(G, f) = \max\{W_i(G, f): i \in \overline{1,n}\}$.

Теорема 1. *Для любого графа G $id(G) = sw(G)$.*

Докажем выполнение неравенства $id(G) \geqslant sw(G)$.

Пусть $G' = (V, E')$ — граф интервалов, содержащий в качестве подграфа $G = (V, E)$, для которого $\Delta(G') = id(G)$. Поскольку G' — граф интервалов, то для его множества вершин существует представление в виде набора интервалов действительной прямой такого, что две вершины являются смежными тогда и только тогда, когда два интервала пересекаются. Не умаляя общности, можно считать, что все эти интервалы имеют различные левые концы. Перенумеруем вершины графа в порядке возрастания левых концов соответствующих им интервалов. Обозначим получившуюся нумерацию вершин через f. Рассмотрим произвольную вершину v графа G'. Положим $i = f(v)$. Пусть d_1 — это число вершин G' смежных v, имеющих номера, меньшие i, а d_2 — число вершин смежных v, имеющих номера, большие i.

Пусть (u, w) ребро G такое, что $f(u) < i$, а $i \geqslant f(w)$. Ясно, что $(u, w) \in E'$, и интервалы, соответствующие этим вершинам (в G'), пересекаются. По построению нумерации f из этого следует, что интервалы, соответствующие вершинам u и v, также пересекаются и $(u, v) \in E'$. Из этого рассуждения сразу вытекает, что $S_i^*(G, f) \leqslant d_1$.

Рассмотрим теперь вершину w графа G, имеющую наибольший номер и такую, что $w \cong v$ (в G). Очевидно, что $W_i(G, f) = f(w) - f(v)$. Если $f(w) = f(v)$, то $W_i(G, f) \leqslant d_2$. Поэтому предположим, что $f(v) < f(w)$. Пусть $j \in \overline{i+1, f(w)}$ и $u = f^{-1}(j)$. Ребро $(v, w) \in E$, а значит, $(v, w) \in E'$. Следовательно, интервалы, соответствующие этим двум вершинам, пересекаются. По построению нумерации вершин f интервалы, соответствующие v и u, также должны пересекаться и $(v, u) \in E'$. Из этого вытекает, что $W_i(G, f) \leqslant d_2$.

Поскольку в графе G' $deg(v) = d_1 + d_2$, то $deg(v) \geqslant S_i^*(G, f) + W_i(G, f)$. В силу произвольности выбора вершины v, равенства $id(G) = \Delta(G')$ и неравенства $sw(G, f) \geqslant sw(G)$, получаем, что $id(G) \geqslant sw(G)$.

Докажем теперь выполнение неравенства $id(G) \leqslant sw(G)$.

Пусть f — нумерация вершин графа $G = (V, E)$ такая, что $sw(G) = sw(G, f)$. Обозначим через $r(v)$, где v — вершина G, а n — число вершин G, число, равное $\max\{i \in \overline{f(v), n}: f^{-1}(i) \cong v\} + \frac{1}{2}$. Поставим в соответствие вершине v интервал $(f(v), r(v))$. Совокупность интервалов, соответствующих вершинам G, порождает граф интервалов, который мы обозначим через $G' = (V, E')$. Легко видеть, что если $(u, v) \in E$ и $f(u) < f(v)$, то $f(v) < r(u)$ и $(f(v), r(v)) \cap (f(u), r(u)) \neq 0$. Следовательно, $(u, v) \in E'$. Таким образом, граф G является подграфом графа интервалов G'.

Пусть v — произвольная вершина графа G, $i = f(v)$. Обозначим через d_1 число вершин в графе G, имеющих номера, меньшие i и смежных v в графе G', а через

d_2 — число вершин в графе G, имеющих номера, большие i, и смежных v в графе G'.

Рассмотрим произвольную вершину u, имеющую номер, меньший i, и смежную v в G'. Это означает, что $f(v) < r(u)$. Из этого вытекает, что существует $(u, w) \in E$ такое, что $f(w) \geqslant i$. Отсюда следует, что $d_1 \leqslant S_i(G, f)$. Рассмотрим теперь вершину u, имеющую максимальный номер и такую, что $v \cong u$ в графе G'. Заметим, что вершины с номерами от $i+1$ до $f(u)$ — это все вершины G', смежные v в графе G' и имеющие номера, большие i. Следовательно, $d_2 \leqslant |f(u) - f(v)| = W_i(G, f)$.

Поскольку в графе G' $deg(v) = d_1 + d_2$, то $deg(v) \leqslant S_i^*(G, f) + W_i(G, f)$. В силу произвольности выбора вершины v, неравенства $id(G) \leqslant \Delta(G')$ и равенства $sw(G, f) = sw(G)$ получаем, что $id(G) \leqslant sw(G)$.

Теорема доказана.

Оценки интервальной степени графа. В этой части мы приведем некоторые оценки интервальной степени графа, получающиеся с помощью приведенного выше утверждения о сведении задачи вычисления этого инварианта к задаче выбора оптимальной нумерации. Начнем с простой оценки, которая, тем не менее, оказывается точной в ряде случаев.

Теорема 2. *Для любого графа G $bw(G) \leqslant id(G) \leqslant 2\,bw(G)$, причем если G — связный граф, то $bw(G) = id(G)$ тогда и только тогда, когда G — полный граф.*

Неравенство сразу следует из связей рассматриваемой нами задачи выбора оптимальной нумерации вершин с задачами, с помощью которых определялись величина вершинного разделения и ширина ленты графа, а также из того, что для любого графа G $vs(G) \leqslant bw(G)$. Очевидно, что для графа K_n — полного графа с n вершинами — $bw(K_n) = id(K_n) = n-1$. Докажем, что если G — связный граф, то из равенства $bw(G) = id(G)$ следует, что G — полный граф.

Пусть $bw(G) = id(G) = k$, n — число вершин этого графа. Поскольку для любой нумерации f вершин графа G $bw(G, f) \leqslant sw(G, f)$, то найдется нумерация f такая, что $bw(G, f) = sw(G, f) = k$, а так как для любого $i \in \overline{1, n}$ $W_i(G, f) \leqslant S_i^*(G, f) + W_i(G, f)$, то существует такое i, что $W_i(G, f) = S_i^*(G, f) + W_i(G, f) = k$. Из данного равенства вытекает, что $S_i^*(G, f) = 0$ и $i = 1$. Пусть $v = f^{-1}(1)$, а u — вершина с максимальным номером такая, что $v \cong u$. Ясно, что $k = f(u) - f(v)$. Если $f(u) = n$, то $bw(G) = n-1$. Нетрудно видеть, что $bw(G) = n-1$ тогда и только тогда, когда G — полный граф с n вершинами. Предположим, что $j = f(u) < n$. Отметим, что $j > 1$. Среди вершин с номерами от 1 до $j-1$ найдется вершина w, не имеющая смежных вершин с номерами, большими либо равными j. В противном случае все вершины с номерами от 1 до $j-1$ должны быть смежны вершине u и не могут быть смежны вершинам с номерами, большими j. Так как $S_j^*(G, f) + W_j(G, f) \leqslant S_i^*(G, f) + W_i(G, f)$, то вершина w в этом случае должна иметь номер n. Пусть w — вершина с минимальным номером, удовлетворяющая нужному нам свойству. Изменим нумерацию вершин графа. Занумеруем вершину w первой, а остальные вершины перенумеруем в том же порядке, что и в нумерации f. Обозначим получившуюся нумерацию через g. Остается заметить, что $bw(G, g) < bw(G, f)$, что противоречит выбору нумерации f.

Теорема доказана.

В теореме показано, при каких условиях нижняя оценка интервальной степени оказывается точной. Отметим, что верхняя оценка точна, например, для пути с n вершинами P_n при $n > 2$ $(id(P_n) = 2\,bw(P_n) = 2)$.

Докажем теперь менее очевидную оценку интервальной степени графа, являющуюся точной для некоторых классов графов.

Пусть $G = (V, E)$ — некоторый граф. Обозначим через $G^{(2)}$ граф с тем же множеством вершин, что и граф G, две вершины которого являются смежными тогда и только тогда, когда их соединяет путь в G, содержащий не более двух ребер.

Теорема 3. *Для любого графа G $vs(G^{(2)}) \leqslant id(G)$.*

Докажем, что для любого графа G $vs(G^{(2)}) \leqslant sw(G)$. Для этого рассмотрим произвольную нумерацию вершин f и покажем, что $vs(G^{(2)}, f) \leqslant sw(G, f)$.

Пусть v — некоторая вершина, $i = f(v)$. Выберем вершину u, имеющую минимальный номер, такую, что в графе G существует ребро (u, w) и $f(w) > i$. Рассмотрим $j = f(u)$ и докажем, что $S_i(G^{(2)}, f) \leqslant S_j^*(G, f) + W_j(G, f)$. Заметим, что число вершин x таких, что $j \leqslant f(x) \leqslant i$ и в графе $G^{(2)}$ существует ребро (x, y) и $f(y) > i$, не превосходит $W_j(G, f)$. Поэтому нам достаточно доказать, что число вершин x таких, что $f(x) < j$ и в графе $G^{(2)}$ существует ребро (x, y) и $f(y) > i$, не превосходит $S_j^*(G, f)$. Пусть x — такая вершина. Нетрудно видеть (по выбору вершины u, имеющей номер j), что эта вершина не может быть смежна в графе G вершине, имеющей номер, больший i. Следовательно, в графе G существуют ребра (x, y) и (y, z) такие, что $f(z) > i$. Также из выбора вершины u, имеющей номер j, следует, что $f(y) \geqslant j$. Из существования ребра (x, y) вытекает, что вершина x вносит единичный вклад в величину $S_j^*(G, f)$. Таким образом, нужное нам неравенство доказано.

В силу произвольности выбора вершины v из неравенства $S_i(G^{(2)}, f) \leqslant S_j^*(G, f) + W_j(G, f)$ следует, что $vs(G^{(2)}, f) \leqslant sw(G, f)$.

Теорема доказана.

Данная оценка оказывается точной для некоторых классов графов. Мы докажем этот факт для кографов и так называемых кодвудольных графов.

Рассмотрим случай кографов. Напомним, что граф называется *кографом*, если у него нет порожденных подграфов, являющихся путями с четырьмя вершинами. Для того чтобы получить оценку, рассмотрим две операции над графами.

Пусть $G_1 = (V_1, E_1)$, $G_2 = (V_2, E_2)$ — графы такие, что $V_1 \cap V_2 = 0$. Объединением графов G_1 и G_2 называется граф $G_1 \cup G_2 = (V_1 \cup V_2, E_1 \cup E_2)$, а соединением графов G_1 и G_2 — граф $G_1 + G_2 = (V_1 \cup V_2, E)$, где $E = E_1 \cup E_2 \cup \{(u, v) : u \in V_1, v \in V_2\}$.

Теорема 4. *Пусть $G_1 = (V_1, E_1)$, $G_2 = (V_2, E_2)$ — графы такие, что $V_1 \cap V_2 = 0$. Тогда $vs((G_1 + G_2)^{(2)}) = id(G_1 + G_2) = n - 1$, где $n = |V_1| + |V_2|$.*

Для доказательства заметим, что граф $(G_1 + G_2)^{(2)}$ является полным графом с n вершинами. Следовательно, $vs((G_1 + G_2)^{(2)}) = n - 1$. Очевидно, что для любого графа G с n вершинами $id(G) \leqslant n - 1$. Отсюда и из неравенства $vs((G_1 + G_2)^{(2)}) \leqslant id(G_1 + G_2)$ следует наше утверждение.

Известно (см. [6]), что кографы можно охарактеризовать с помощью операций объединения и соединения графов. Граф $G = (V, E)$ является кографом тогда и только тогда, когда выполнено одно из следующих условий:

1) $|V| = 1$;

2) существуют кографы $G_1, \ldots, G_k$ и $G = G_1 \cup \cdots \cup G_k$;

3) существуют кографы $G_1, \ldots, G_k$ и $G = G_1 + \cdots + G_k$.

Из этого и утверждения теоремы 4 немедленно вытекает формула для вычисления интервальной степени кографов.

Следствие. Для связного кографа G с n вершинами $vs(G^{(2)}) = id(G) = n - 1$.

Рассмотрим теперь кодвудольные графы. Обозначим через $\overline{G}$ граф, двойственный графу $G = (V, E)$, т. е. $\overline{G} = (V, \overline{E})$, где $\overline{E} = \{(u, v) \colon (u, v) \notin E\}$. Граф G называется *кодвудольным*, если $\overline{G}$ — двудольный граф.

Пусть $G = (V, E)$ — кодвудольный граф. Поскольку $\overline{G}$ — двудольный граф, то существует разбиение множества вершин V на два подмножества V_1 и V_2 такие, что ребра $\overline{G}$ соединяют вершины V_1 с вершинами V_2. Назовем эти множества долями кодвудольного графа. Обозначим через $n_1(G)$ число вершин первой доли, а через $n_2(G)$ — число вершин второй доли. Обозначим также через $m_1(G)$ число вершин первой доли, смежных вершинам второй доли, а через $m_2(G)$ — число вершин второй доли, смежных вершинам первой доли.

Теорема 5. *Пусть G — кодвудольный граф. Тогда* $vs(G^{(2)}) = id(G) = \max\{n_1(G) + m_2(G), n_2(G) + m_1(G)\} - 1$.

Пусть $n_1 = n_1(G)$, $n_2 = n_2(G)$, $m_1 = m_1(G)$, а $m_1 = m_1(G)$. Поскольку графы $K_{n_1+m_2}$ и $K_{n_2+m_1}$ являются подграфами $G^{(2)}$, то $\max\{n_1+m_2, n_2+m_1\}-1 \leqslant vs(G^{(2)})$. Теорема 3 гарантирует выполнение неравенства $vs(G^{(2)}) \leqslant id(G)$. Докажем, что имеет место неравенство $id(G) \leqslant \max\{n_1 + m_2, n_2 + m_1\} - 1$. Рассмотрим граф интервалов G' с тем же множеством вершин, что и G, задаваемый следующим семейством из $n_1 + n_2$ интервалов. Первым $n_1 - m_1$ вершинам соответствуют интервалы $(1,2)$, следующим m_1 — $(1,3)$, следующим $n_2 - m_2$ — $(2,4)$ и последним m_2 вершинам — интервалы $(3,4)$. Очевидно, что граф G является подграфом графа интервалов G'. Следовательно, $id(G) \leqslant \Delta(G') = \max\{n_1 + m_2, n_2 + m_1\}$.

Теорема доказана.

Работа выполнена при частичной финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (проект 96-00-00285).

Summary

Golovach P. A., Fomin F. V. Interval completion with the smallest max-degree.

The interval degree of a graph G is $\min\{$max-degree of G': G' is interval supergraph of $G\}$. We prove that the problem of computing the interval degree of a graph is equivalent to some vertex ordering problem. For this parameter we give tight bounds in terms of the bandwidth and the pathwidth of a square of a graph.

Литература

1. *Bienstock D.* Graph searching, path-width, tree-width and related problems (a survey) // DIMACS Ser. in Discrete Mathematics and Theoretical Computer Science. 1991. Vol. 5. P. 33–49.
2. *Kirousis L. M. Papadimitriou C. H.* Interval graphs and searching // Disc. Math. 1985. Vol. 55. P. 181–184.
3. *Chinn P. Z., Chvátalová J., Dewdney A. K., Gibbs N. E.* The bandwidth problem for graphs and matrices — a survey // J. Graph Theory. 1982. Vol. 6. P. 223–224.
4. *Головач П. А.* Суммарная величина вершинного разделения графов // Дискр. мат. 1997. Т. 9, № 4. С. 86–91.
5. *Головач П. А, Фомин Ф. В.* Суммарная величина вершинного разделения и профиль графов // Там же. 1998. Т. 10, № 8. С. 87–94.
6. *Corneil D. G., Lerchs H., Burlingham L. S.* Complement reducible graphs // Discr. Appl. Math. 1981. Vol. 3. P. 163–174.

Статья поступила в редакцию 11 ноября 1997 г.