ISSN 0132-4624
ISSN 0024-0850

# ВЕСТНИК САНКТ-ПЕТЕРБУРГСКОГО УНИВЕРСИТЕТА '99

серия 1 МАТЕМАТИКА МЕХАНИКА АСТРОНОМИЯ

выпуск 1

УДК 517.977 Вестник СПбГУ. Сер. 1, 1999, вып. 1 (№ 1)

*Н. Н. Петров, Ф. В. Фомин*

# ДИСКРЕТНЫЕ ПРОГРАММЫ ПОИСКА НА ГРАФАХ

**Введение.** Мы продолжаем изучение проблемы гарантированного поиска, начатое в [1–5]. Точную постановку задачи можно найти в статье [6], здесь же мы ограничимся неформальным описанием.

В некоторой пещере, представляемой системой туннелей, потерялся незадачливый исследователь, которого мы должны спасти. В нашем распоряжении имеется карта туннелей (топологический граф, вершины которого — точки в $\mathbf{R}^3$, а ребра — непересекающиеся конечнозвенные ломаные с концами в соответствующих вершинах, замкнутые в $\mathbf{R}^3$). План спасения не должен зависеть от того, хочет ли потерявшийся найтись или, наоборот, прилагает все усилия, чтобы скрыться. В обоих случаях ни одна из сторон не получает информации о действиях другой. Ставится вопрос о нахождении наименьшего числа преследователей (спасателей), необходимого для успешного завершения поиска убегающего (потерявшегося) на конечном связном топологическом графе $\Gamma$ (в графе могут быть петли и кратные ребра). Предполагается, что максимальная скорость преследователей равна единице, а скорость убегающего не превосходит некоторой константы $\mu$. Этот параметр обозначается через $S_\mu(\Gamma)$.

В статье [6] вводится понятие *почти дискретной программы* (в которой действия каждого из преследователей заключаются в стоянии в вершинах и переходах из вершины в вершину с максимальной скоростью) и доказывается следующее утверждение.

**Теорема 1**. *Пусть $\mu \geqslant 1$. Тогда если на графе $\Gamma$ существует выигрывающая программа для $n$ преследователей, то на графе $\Gamma$ существует и почти дискретная выигрывающая программа для $n$ преследователей.*

Используя теорему 1, мы покажем, что если длины ребер графа $\Gamma$ равны, то при $\mu = 1$ задача нахождения $S_\mu(\Gamma)$ сводится к рассмотрению ещё более "простых" программ, называемых нами дискретными. Дискретные программы оказываются чрезвычайно полезными при решении модельных задач. Мы докажем, что для полного топологического графа с $n$ вершинами, все ребра которого имеют единичную длину, $S_1(K_n) = n$ для всех $n \geqslant 4$.

Определим следующие понятия. Пусть $\Pi = \{x_1(t), \ldots, x_n(t)\}$, $t \in [0,T]$, — программа для $n$ преследователей $P_1, \ldots, P_n$ на топологическом графе $\Gamma$ ($x_i(t)$ — траектория $i$-го преследователя). Для каждого $\tau \in [0,T]$ введем в рассмотрение *множество достижимости (загрязненное множество)* $F(\Pi, \tau) = \{p \in \Gamma$: *существует траектория* $y(t)$, $t \in [0,\tau]$, *убегающего* $E$, *обладающая свойствами:* $y(t) \notin \cup_{i=1}^n \{x_i(t)\}$ *для* $t \in [0,\tau]$ *и* $y(\tau) = p\}$. Таким образом, загрязненное в момент $\tau$ множество — это множество всех точек графа $\Gamma$, в которые убегающий может попасть к моменту $\tau$, не встретив ни одного из преследователей. Для каждого момента времени $\tau \in [0,T]$ определим *очищенное множество* $C(\Pi, \tau) = \Gamma \setminus F(\Pi, \tau)$. Отметим, что заданная на $[0,T]$ программа $\Pi$ является выигрывающей тогда и только тогда, когда $C(\Pi, T) = \Gamma$.

**Дискретные программы.** Покажем, как свести решение задачи поиска к перебору конечного числа вариантов в случае, когда длины ребер графа равны, а максимальная скорость убегающего равна единице.

Заданная на $[0,T]$ программа преследователей $\Pi$ называется *дискретной*, если $T \geqslant 1$ — натуральное число, и для всякого $k \in \{1, \ldots, T\}$ на протяжении $[k-1, k]$ каждый из преследователей либо стоит в вершине графа, либо переходит из вершины в смежную вершину с максимальной скоростью.

Пусть $\Pi = \{x_1(t), \ldots, x_n(t)\}$, $t \in [0, T]$, — некоторая программа $n$ преследователей на графе $\Gamma$. Будем говорить, что программа является *невырожденной*, если для всяких моментов $t_1 \neq t_2$, таких, что положения всех преследователей совпадают, множество достижимости убегающего в момент $t_1$ целиком не содержится в множестве достижимости убегающего в момент $t_2$. Очевидно, что для всякого числа преследователей и произвольного $\mu$ на графе $\Gamma$ выигрывающая программа существует тогда и только тогда, когда существует невырожденная выигрывающая программа. В дальнейшем мы ограничимся рассмотрением только невырожденных программ.

Следующая простая лемма поясняет целесообразность рассмотрения дискретных программ.

**Лемма 2**. *Пусть длины ребер графа $\Gamma$ равны. Тогда для всякого натурального $n$ на графе $\Gamma$ существует конечное число невырожденных дискретных программ для $n$ преследователей при $\mu = 1$.*

Доказательство. Рассмотрим произвольную дискретную программу для $n$ преследователей $\Pi$, заданную на отрезке $[0, T]$. Поскольку программа дискретная, а $\mu = 1$, то нетрудно показать, что в каждый из моментов времени $i \in \{0, \ldots, T\}$ внутренность каждого ребра графа $\Gamma$ принадлежит либо множеству достижимости $F(\Pi, i)$, либо очищенному множеству $C(\Pi, i)$. Так как программа невырожденная, найдется число $\mathbf{T}$ такое, что длительность действия всякой дискретной программы не превосходит $\mathbf{T}$, а потому число дискретных программ конечно. □

Мы покажем, что при указанных выше ограничениях на скорости игроков и длины ребер графа существование выигрывающей программы влечет существование выигрывающей дискретной программы, а потому решение задачи поиска сводится к рассмотрению конечного числа вариантов.

Нам понадобится следующее вспомогательное утверждение.

**Лемма 3**. *Пусть длины ребер графа $\Gamma$ равны. Тогда если дискретная программа $\Pi = \{x_1(t), \ldots, x_n(t)\}$, $t \in [0, T]$, не является выигрывающей на графе $\Gamma$ при $\mu = 1$, то существует траектория убегающего $y(t)$, $t \in [0, T]$, такая, что для всех $t \in [0, T]$, $i \in \{1, \ldots, n\}$, выполнено неравенство*

$$\rho(x_i(t), y(t)) \geqslant \frac{1}{2}. \tag{1}$$

Доказательство. Пусть $\Pi = \{x_1(t), \ldots, x_n(t)\}$, $t \in [0, T]$, — произвольная невыигрывающая дискретная программа на графе $\Gamma$.

Нетрудно показать, что в условиях леммы 3 замыкание каждого из множеств достижимости $F(\Pi, i)$, $i \in \{0, \ldots, T\}$, представимо в виде объединения некоторых ребер графа. Мы будем называть ребро *загрязненным* в момент $i$, если все его внутренние точки принадлежат множеству $F(\Pi, i)$. Заметим, что в момент времени $T$ имеется по крайней мере одно загрязненное ребро.

Воспользовавшись индукцией, мы докажем лемму, показав, что для всех $j \in \{0, \ldots, T\}$ выполняется следующее утверждение: для всякого загрязненного в момент $j$ ребра $a$ найдется траектория убегающего $y(a, j, t)$, $t \in [0, j]$, удовлетворяющая условию (1) на отрезке $[0, j]$ и такая, что точка $y(a, j, j)$ лежит на середине ребра $a$.

Для $j = 0$ утверждение очевидно. Предположим, что для всех $k \in \{0, \ldots, j\}$, $j \leqslant T - 1$, утверждение доказано. Выберем произвольное загрязненное в момент $j + 1$ ребро $a$. Поскольку все внутренние точки ребра $a$ принадлежат множеству достижимости $F(\Pi, j+1)$, убегающий имеет возможность, уклоняясь от встречи с преследователями, попасть к моменту времени $j+1$ на середину ребра $a$. Так как программа преследователей дискретна, в условиях леммы 3 нетрудно убедиться, что убегающий может попасть на середину ребра $a$ и в том случае, когда в момент $j$ он тоже находится на середине некоторого ребра $a'$ (уклоняясь от встречи с преследователями до момента $j + 1$). Заметим также, что либо $a' = a$, и тогда убегающий стоит на протяжении $[j, j+1]$, либо ребра $a', a$ смежны, и убегающий на протяжении $[j, j+1]$ переходит с максимальной скоростью с одного ребра на другое.

Для завершения индукционного перехода осталось показать, что на протяжении $[j, j+1]$ ни один из преследователей не может подойти к убегающему ближе, чем на $\frac{1}{2}$. Если $a = a'$, то убегающий стоит на середине ребра $a$, и преследователь, подойдя к убегающему на расстояние $< \frac{1}{2}$, должен пройти ребро $a$ и в момент $j + \frac{1}{2}$ встречает убегающего. Если ребра $a', a$ смежны, то, используя дискретность программы, нетрудно показать, что ни один из преследователей, подойдя к убегающему на расстояние $< \frac{1}{2}$, не может избежать столкновения с ним. □

**Теорема 4.** *Пусть длины ребер графа $\Gamma$ равны. Тогда если при $\mu = 1$ на графе $\Gamma$ существует выигрывающая программа для $n$ преследователей, то на $\Gamma$ существует и дискретная выигрывающая программа для $n$ преследователей.*

Доказательство. Пусть $\Pi = \{x_1(t), \ldots, x_n(t)\}$, $t \in [0, T]$, выигрывающая при $\mu = 1$ программа на графе $\Gamma$ с ребрами одинаковой длины. Будем считать, что $T$ — натуральное число. Сославшись на теорему 1, не умаляя общности, можно предполагать, что $\Pi$ — почти дискретная программа. Обозначим через $M$ множество точек графа $\Gamma$, лежащих на расстоянии $\frac{1}{2}$ от вершин графа $\Gamma$. Определим множество

$$\Pi^{-1}(M) = \{t \in [0, T] \colon x_i(t) \in M \quad \text{для некоторого } i \in \{1, \ldots, n\}\}.$$

$\Pi$ является почти дискретной программой, а потому множество $\Pi^{-1}(M)$ состоит из конечного числа элементов. Поскольку множество $\Pi^{-1}(M)$ конечно, то, не умаляя общности, можно полагать, что для всех $k \in \{0, \ldots, T\}$, $i \in \{1, \ldots, n\}$, выполнено условие

$$x_i(k) \notin M. \tag{2}$$

Добиться выполнения этого условия всегда можно, увеличив на единицу длительность программы и заставив преследователей "постоять" время $\sigma$ и $1 - \sigma$ в начале и в конце программы.

Определим программу $\Pi^d = \{x_1^d(t), \ldots, x_n^d(t)\}$, $t \in [0, T]$, в которой положения преследователей в моменты времени $k \in \{0, \ldots, T\}$ задаются равенствами:

$$x_i^d(k) = A \in V\Gamma, \qquad \text{если } \rho(x_i(k), A) < \frac{1}{2},$$

а поведение $i$-го игрока на промежутках $[k, k+1]$ заключается в стоянии в вершине $x_i^d(k)$, если $x_i^d(k) = x_i^d(k+1)$, и в переходе из $x_i^d(k)$ в $x_i^d(k+1)$ — в противном случае.

Заметим, что в силу условия (2) действия преследователей в программе $\Pi^d$ определяются однозначно. Нетрудно убедиться, что для всяких $i \in \{1, \ldots, n\}$ и $k \in \{0, \ldots, T-1\}$ вершины $x_i^d(k)$ и $x_i^d(k+1)$ совпадают или смежны, а потому траектории преследователей в новой программе являются допустимыми.

Убедимся в выполнении для всех $t \in [0, T]$ и $i \in \{1, \ldots, n\}$ неравенства

$$\rho(x_i(t), x_i^d(t)) < \frac{1}{2}. \tag{3}$$

Обозначим через $V_{\frac{1}{2}}(A)$ открытую $\frac{1}{2}$-окрестность вершины $A$, т.е. множество точек графа $\Gamma$, лежащих на расстоянии $< \frac{1}{2}$ от вершины $A$. Предположим, что игрок с номером $i$ в программе $\Pi$ в момент времени $k \in \{0, \ldots, T-1\}$ находится в точке из множества $V_{\frac{1}{2}}(A)$. Если на протяжении $[k, k+1]$ преследователь $P_i$ в программе $\Pi$ не покидает $V_{\frac{1}{2}}(A)$, то выполнение неравенства (3) на этом промежутке очевидно. Пусть $x_i(k+1) \in V_{\frac{1}{2}}(B)$, где $B$ — некоторая смежная $A$ вершина. Поскольку программа $\Pi$ является почти дискретной, то преследователь $P_i$ не может находиться на протяжении всего промежутка $[k, k+1]$ во внутренности ребра $(A, B)$, а потому для некоторого $t^* \in [k, k+1]$ выполняется по крайней мере одно из равенств:

$x_i(t^*) = A$, $x_i(t^*) = B$. Рассмотрим случай $x_i(t^*) = A$ (второй случай рассматривается аналогично). Обозначим за $t_*$ момент выхода игрока $P_i$ из вершины $A$ в программе П. В программе $\Pi^d$ игрок с номером $i$ на протяжении $[k, k+1]$ идет из $A$ в $B$, а в программе П игрок с этим номером идет на протяжении $[k, t^*]$ из точки $x_i(k)$ в $A$, на протяжении $[t^*, t_*]$ стоит в $A$ и на протяжении $[t_*, k+1]$ идет из $A$ в $x_i(k+1)$. Поскольку в программах П и $\Pi^d$ преследователи движутся с максимальной скоростью, то на промежутках $[k, t^*]$ и $[t_*, k+1]$ функция $\rho(x_i(t), x_i^d(t))$ постоянна. В моменты времени $k$ и $k+1$ неравенство (3) выполняется, а потому неравенство выполняется и на протяжении $[k, t^*] \cup [t_*, k+1]$. На протяжении $[t^*, t_*]$ игрок $P_i$ в программе П стоит в $A$, и, следовательно, для всех $t \in [t^*, t_*]$ выполняется $\rho(x_i(t), x_i^d(t)) \leqslant \rho(x_i(t_*), x_i^d(t_*))$. Таким образом, неравенство (1) выполняется на всем промежутке $[k, k+1]$, и поскольку $k$ выбиралось произвольным образом, то это неравенство выполняется и на всем отрезке $[0, T]$.

Дискретность программы $\Pi^d$ очевидна. Докажем, что программа $\Pi^d$ выигрывающая. Если $\Pi^d$ не является выигрывающей, то в силу леммы 3 существует такая траектория убегающего $y(t)$, что для всех $t \in [0, T]$ выполнено условие (1). Однако поскольку программа П является выигрывающей, то существование такой траектории противоречит неравенству (3). □

**Полные графы.** Докажем теперь основную теорему, касающуюся полных графов.

**Теорема 5.** *Пусть $K_{n+1}$ — полный топологический граф с $n+1$ вершиной, все ребра которого имеют единичную длину. Тогда $S_1(K_{n+1}) = n+1$ для всех $n \geqslant 3$.*

Доказательство. Заметим прежде всего, что $n+1$ преследователей достаточно для поимки убегающего на $K_{n+1}$ при любом $\mu$. Для доказательства неравенства $S_1(K_{n+1}) \geqslant n+1$ покажем, что ни одна программа для $n$ преследователей не может быть выигрывающей. Предположим противное, и пусть П — выигрывающая программа для $n$ преследователей. Сославшись на теорему 2, мы можем предполагать, что П является дискретной программой.

Обозначим через $p_i(v)$ число преследователей, находящихся в момент $i$ в вершине $v$. Назовем вершину $v$ *особой* в момент $i$, если $p_i(v)$ не меньше числа загрязненных ребер, инцидентных этой вершине. Будем обозначать через $A_i$ множество всех особых вершин в момент $i$, а через $a_i$ — его мощность. Будем говорить, что вершина $v$ является *$k$-особой* в момент $i$, если $v \in A_i$ и $p_i(v) = k$. Назовем вершину $v$ *голой* в момент $i$, если все инцидентные ей ребра в этот момент загрязнены. Будем обозначать через $B_i$ множество всех голых вершин в момент $i$, а через $b_i$ — его мощность.

Пусть $v$ — вершина степени $\geqslant 3$ графа Г. Тогда для всякой дискретной программы П на Г легко доказываются следующие утверждения:

**Лемма 6.** *Если $v \notin A_i$ и $p_{i+1}(v) = 0$, то $v \in B_{i+1}$.*

**Лемма 7.** *Если $v \notin A_i$ и $v \in A_{i+1}$, то $p_{i+1}(v) \geqslant 2$.*

Покажем, что при реализации П все величины $a_j \leqslant 2$, и, следовательно, эта программа не может быть выигрывающей. Рассмотрим три случая.

*Случай 1.* $a_j = 0$, $a_{j+1} = k \geqslant 1$, т. е. в момент $j$ особых вершин не было, а в момент $j+1$ их стало $k$: $v_1, \ldots, v_k$.

Тогда в момент $j+1$ в неособых вершинах находятся

$$n - \sum_{i=1}^{k} p_{j+1}(v_i)$$

преследователей и существует не менее

$$l \triangleq (n+1) - k - \left(n - \sum_{i=1}^{k} p_{j+1}(v_i)\right) = \sum_{i=1}^{k} p_{j+1}(v_i) - k + 1$$

вершин, свободных от преследователей. По лемме 6 все эти вершины должны быть голыми в момент $j+1$. Так как все они смежны с каждой особой вершиной, то $p_{j+1}(v_i) \geqslant l$ для $i = 1, \ldots, k$ и, следовательно,

$$kl + n - \sum_{i=1}^{k} p_{j+1}(v_i) \leqslant n.$$

Это неравенство может быть переписано в виде

$$(1-k)\left(\sum_{i=1}^{k} p_{j+1}(v_i) - k\right) \geqslant 0.$$

Так как по лемме 7 $p_{j+1}(v_i) \geqslant 2$ для всех $i = 1, \ldots, k$, то отсюда следует, что $a_{j+1} = k = 1$. Таким образом, в случае 1 может возникнуть только одна особая вершина.

*Случай 2.* В момент $j$ была одна особая вершина $v_0$, а в момент $j+1$ особых вершин стало $k+1$: $v_0, v_1, \ldots, v_k$, $k \geqslant 1$ (т. е. добавилось $k$ новых особых вершин).

Тогда в неособых вершинах в момент $j+1$ находятся

$$n - \sum_{i=0}^{k} p_{j+1}(v_i)$$

преследователей и

$$b_{j+1} \geqslant l \triangleq (n+1) - (k+1) - \left(n - \sum_{i=1}^{k} p_{j+1}(v_i)\right) = \sum_{i=0}^{k} p_{j+1}(v_i) - k.$$

Заметим, что в силу леммы 7 $l > 0$. Отсюда, рассуждая так же, как и в случае 1, заключаем, что во всех особых вершинах в момент $j+1$ должно находиться не менее $(k+1)l$ преследователей. Следовательно,

$$(k+1)l + n - \sum_{i=0}^{k} p_{j+1}(v_i) \leqslant n.$$

Это неравенство равносильно следующему:

$$\sum_{i=0}^{k} p_{j+1}(v_i) \leqslant k+1.$$

Замечая, что в силу леммы 7 левая часть этого неравенства не меньше $p_{j+1}(v_0) + 2k$, получаем $p_{j+1}(v_0) = 0$, что невозможно, так как $p_{j+1}(v_0) \geqslant l > 0$. Таким образом, случай 2 реализоваться не может.

*Случай 3.* В момент $j$ была одна особая вершина $u_0$, а в момент $j+1$ их стало $k$: $v_1, \ldots, v_k$, $k \geqslant 2$ (т. е. вершина $u_0$ стала неособой и добавилось $k$ новых особых вершин). Тогда в неособых вершинах в момент $j+1$ находятся

$$n - \sum_{i=1}^{k} p_{j+1}(v_i)$$

преследователей, а незанятых вершин оказывается не менее

$$l \triangleq (n+1) - k - \left(n - \sum_{i=1}^{k} p_{j+1}(v_i)\right) = \sum_{i=1}^{k} p_{j+1}(v_i) - k + 1.$$

В силу леммы 7 $l \geqslant 3$. В момент $j+1$ голых вершин не менее $l-1$ (вершина $u_0$ может оказаться незанятой, но не голой), и, следовательно, в каждой особой вершине в момент $j+1$ не менее $l-1$ преследователей. Как и выше, получаем

$$k(l-1)+n-\sum_{i=1}^{k} p_{j+1}(v_i) \leqslant n$$

или

$$(k-1)\sum_{i=1}^{k} p_{j+1}(v_i) \leqslant k^2,$$

откуда в силу леммы 7 имеем $k=2$. Из предыдущего неравенства следует также, что

$$p_{j+1}(v_1)+p_{j+1}(v_2) \leqslant 4,$$

$$p_{j+1}(v_1)=p_{j+1}(v_2)=2 \quad \text{и} \quad l=3.$$

Ранее было отмечено, что в момент $j+1$ голых вершин не менее $l-1=2$. С другой стороны, их не может быть более двух, так как в этом случае в особой вершине было бы более двух преследователей. Отсюда следует, что в момент $j+1$ существуют ровно две голые вершины (обозначим их через $u_1, u_2$). Пусть $A$ — множество всех вершин, отличных от $u_0, v_1$ и $v_2$. В силу леммы 6 каждая из вершин этого множества в момент $j+1$ либо занята, либо является голой. Отсюда следует, что вершины $u_1, u_2 \in A$, в них нет преследователей, а каждая из остальных вершин множества $A$ (которые мы будем обозначать через $w_1, \ldots, w_{n-4}$) занята одним преследователем. Вершине $v_1$ инцидентны два загрязненных ребра — $(v_1, u_1)$ и $(v_1, u_2)$, остальные же инцидентные ей ребра должны быть очищены. Заметим, что ребро $(v_1, u_0)$, являющееся очищенным в момент $j+1$, в момент $j+2$ окажется загрязненным, если к этому моменту в вершину $u_0$ не придет преследователь из $v_1$. Все сказанное выше относительно $v_1$ справедливо и для вершины $v_2$. Заметим, что рассматриваемая ситуация может возникнуть лишь для $n \geqslant 4$.

Покажем теперь, что $a_{j+2} < 2$. Предположим сначала, что в этот момент стала особой вершина $u_i$ ($i=0,1,2$) с $m$ очищенными инцидентными ребрами. Если $m=0$, то в $u_i$ должны собраться все преследователи, и, следовательно, никакая другая вершина в момент $j+2$ не может стать особой. Если $m=1$, то очищенным ребром, инцидентным $u_i$, может быть лишь $(u_i, v_1)$ или $(u_i, v_2)$ (при переходе преследователя из вершины $w_k$ в $u_i$ ребро $(u_i, w_k)$ оказывается в момент $j+2$ загрязненным). Пусть для определенности очищенным ребром является $(u_i, v_1)$. Оно оказалось очищенным в момент $j+2$ в результате перехода одного преследователя из $v_1$ в $u_i$ (при этом другой преследователь должен остаться в $v_1$). Чтобы вершина $u_i$ могла стать особой в момент $j+2$, все преследователи из вершин $v_2, w_1, \ldots, w_{n-4}$ должны к этому моменту перейти в $u_i$. В этом случае $u_i$ также является единственной особой вершиной в момент $j+2$. Осталось рассмотреть случай $m=2$ (из предыдущего ясно, что $m \leqslant 2$). В этом случае вершине $u_0$ в момент $j+2$ инцидентны два очищенных ребра $(u_i, v_1)$ и $(u_i, v_2)$. Чтобы вершина $u_0$ могла стать особой в момент $j+2$, в ней должны собраться $n-2$ преследователей (все, кроме двух, находящихся в вершинах $v_1$ и $v_2$). Нетрудно убедиться, что и в этой ситуации $u_i$ — единственная особая вершина в момент $j+2$.

Предположим теперь, что в момент $j+2$ стала особой одна из вершин $w_1, \ldots, w_{n-4}$, скажем, $w_1$. Покажем, что и в этом случае других особых вершин в момент $j+2$ быть не может. Это утверждение очевидно, если преследователь, находящийся в момент $j+1$ в вершине $w_1$, покидает ее. В противном случае будем рассуждать следующим образом. Чтобы вершина $w_1$ стала особой в момент $j+2$, в нее необходимо перевести по крайней мере двух преследователей ("нейтрализовать" загрязненные к моменту $j+2$ ребра $(w_1, u_0)$, $(w_1, u_1)$ и $(w_1, u_2)$). При этом ясно, что преследователи, находящиеся в момент $j+1$ в вершинах $w_2, \ldots, w_{n-4}$, для этой цели использованы быть не могут. Поведение же преследователей, находящихся в момент $j+1$ в вершинах $v_1$ и $v_2$, должно быть следующим: для каждого $i = 1, 2$ по крайней мере один из преследователей, находящихся в $v_i$, должен перейти в $w_1$, причем если переходит ровно один преследователь, то другой должен оставаться в $v_i$. Теперь становится ясным, что вершины $v_1$ и $v_2$ не могут быть особыми в момент $j+2$. То же можно сказать и о вершинах $u_0, u_1, u_2, w_2, \dots, w_{n-4}$.

Итак, если в момент $j+2$ становится особой одна из вершин $u_0, u_1, u_2, w_2, \dots, w_{n-4}$, то эта особая вершина — единственная. Таким образом, осталось рассмотреть случай, когда в момент $j+2$ могут стать особыми лишь вершины $v_1$ и $v_2$. Покажем, что на самом деле лишь одна из них может стать особой. Предположим противное, и пусть $\alpha_1, \dots, \alpha_m$, $m \geqslant 1$, — все незанятые вершины в момент $j+2$. Покажем, что каждая из этих вершин — голая (в момент $j+2$). Если $\alpha_i = u_0$, то это утверждение очевидно, поскольку в момент $j+1$ вершина $u_0$ инцидентна загрязненным ребрам $(u_0, u_1)$ и $(u_0, u_2)$. В противном случае вершина $\alpha_i$ оказывается голой в момент $j+2$ в силу леммы 6.

Таким образом, в момент $j+2$ в особых вершинах $v_1, v_2$ находится не менее $2m$ преследователей. Для преследователей, стоящих в этот момент в неособых вершинах, остается $(n+1)-2+m$ вершин, каждая из которых должна быть занята (иначе, незанятых вершин оказывается больше $m$). Отсюда следует, что

$$(n+1) - 2 - m \leqslant n - 2m$$

и $m = 1$.

Итак, если предположить, что особыми (в момент $j+2$) являются обе вершины $v_1$ и $v_2$, то в этот момент в каждой занятой вершине находится ровно один преследователь. Осталось выяснить, каким образом вершина $v_1$, особая в момент $j+1$, осталась особой в момент $j+2$. Это могло произойти лишь следующим образом: два преследователя, находящиеся в момент $j+1$ в вершине $v_1$, перешли в $u_1$ и $u_2$, а в вершину $v_1$ перешел ровно один преследователь из $v_2$ (чтобы в момент $j+2$ "нейтрализовать" единственное инцидентное $v_1$ загрязненное ребро $(u_0, v_1)$). Однако в этом случае нетрудно убедиться, что вершина $v_2$ не может быть особой в момент $j+2$. Противоречие.

Таким образом доказано, что в процессе реализации программы П не может возникнуть более двух особых вершин, и, следовательно, эта программа не может быть выигрывающей. □


## Summary

*Petrov N. N., Fomin F. V.* Discrete search programs on graphs.

We continue the study of a pursuit-evasion game which is played on a topological graph where a team of pursuers tries to catch an evader who is "invisible" for them, all players making use of "simple motions" with fixed maximal speeds and the topological graph being a phase restraint for their trajectories. We prove that if pursuers' speed is equal to the speed of the evader then the solution of the search problem may be reduced to the solution of a discrete problem. Using this reduction we compute the search numbers of complete graphs with edges of unit length.


## Литература


1. *Петров Н. Н.* Некоторые экстремальные задачи поиска на графах // Дифф. уравнения. 1982. Т. 18, № 5. С. 821–827.
2. *Петров Н. Н.* Задачи преследования на одномерном остове куба // Там же. 1987. Т. 23, № 5. С. 908–911.
3. *Фомин Ф.В.* Задача поиска на графах с ограничением скорости // Вестн. С.-Петерб. ун-та. Сер. 1. 1994. Вып. 3 (№ 15). С. 60–66.
4. *Фомин Ф. В.* Задача поиска на деревьях // Там же. 1995. Вып. 2 (№ 8). С. 36–41.
5. *Фомин Ф. В.* Поиск на 3-минимальных деревьях // Там же. Вып. 3 (№ 15). С. 67–72.
6. *Фомин Ф.В.* Почти дискретные программы поиска на графах // Там же. 1997. Вып. 2 (№ 8). С. 51–58.



Статья поступила в редакцию 15 января 1998 г.