ТРУДЫ ИНСТИТУТА МАТЕМАТИКИ И МЕХАНИКИ УрО РАН

Том 6 № 1 2000

УДК 517.977

ПОИСК НА ГРАФАХ

П. А. Головач, Н. Н. Петров, Ф. В. Фомин

Рассматриваются задачи поиска на полных графах и графах правильных многогранников. Полученные результаты являются следствиями фундаментальных теорем теории поиска на графах, полученных авторами в предыдущих работах.

1. Введение и постановка задачи

В работе изучается следующая задача гарантированного поиска. Команда преследователей пытается поймать "невидимого"для них убегающего на связном топологическом графе. Игроки обладают "простыми движениями"с ограниченными максимальными скоростями, а топологический граф является фазовым ограничением для их траекторий. Задача заключается в нахождении наименьшего числа преследователей, необходимого для поимки убегающего при тех или иных условиях поиска.

Авторами первых статей, давших толчок к появлению многочисленных публикаций, посвященных задачам поиска на графах, являются Парсонс [18] и Петров [3]. С момента опубликования этих работ задачи поиска на графах привлекают внимание многих исследователей из разных областей математики по нескольким причинам. Первая причина – это связь некоторых задач поиска с играми в камни (pebble games) [13], которые имеют отношение к задачам рационального использования памяти ЭВМ. Во-вторых, выяснилось, что некоторые инварианты графов, первоначально возникшие в теории сверхбольших интегральных схем (СБИС), такие как ширина разреза [16], топологическая ширина ленты [15], величина вершинного разделения графа [9], во многих случаях имеют теоретико-игровую интерпретацию. Третьей причиной является связь задач поиска с путевой и древесной шириной графа – важнейшими параметрами в теории миноров графов, разработанной Робертсоном и Сеймуром [6, 8]. Проблемы поиска на графах возникают также в задачах о координации движений роботов [19], в некоторых моделях борьбы с компьютерными вирусами [6] и в задачах сохранения секретности информации, передаваемой по электронным сетям с мобильными подслушивающими устройствами ("жучками") [12]. Подробную информацию о задачах поиска и их "родственниках"можно найти в обзорах [6, 10, 17]. Некоторые результаты настоящей статьи опубликованы в [11].

Многие из полученных авторами результатов, нетрадиционных для "российской"теории управления, встретили понимание и поддержку со стороны выдающегося представителя екатеринбургской математической школы Андрея Измаиловича Субботина, о чем мы, его петербургские коллеги, всегда будем помнить.

В дальнейшем под словом *граф* мы будем подразумевать конечный связный топологический граф, вершины которого $V(\Gamma)$ суть точки в $\mathbf{R}^3$, а ребра $E(\Gamma)$ – непересекающиеся конечнозвенные ломаные с концами в соответствующих вершинах. Граф предполагается не имеющим петель и кратных ребер.

На графе Γ находятся n преследователей $P_1, \ldots, P_n$ и убегающий E. Предполагается, что преследователи и убегающий обладают в $\mathbf{R}^3$ (граф вложен в $\mathbf{R}^3$) простыми движениями:

$$\begin{array}{lll} (P_i): & \dot{x}_i = u_i, \quad \|u_i\| \leq 1, & i \in \{1, \ldots, n\}, \\ (E): & \dot{y} = u_0, \quad \|u_0\| \leq \mu, & \end{array}$$

причем Γ является для игроков фазовым ограничением. Для простоты считается, что допустимыми управлениями игроков являются кусочно-постоянные функции, заданные на произвольных промежутках $[0, T]$. Таким образом, допустимыми траекториями будут кусочно-аффинные вектор-функции со значениями в Γ.

Обозначим через ρ внутреннюю метрику графа Γ, т.е. $\rho(x, y)$ есть длина (в евклидовой метрике) кратчайшего пути в Γ с концами в x и y, а через ε – неотрицательное число, характеризующее "радиус поимки".

Убегающий E считается *пойманным* преследователем P_i в момент $t \in [0, T]$, если $\rho(x_i(t), y(t)) \leq \varepsilon$. Совокупность траекторий преследователей $x_i\colon [0, T] \to \Gamma$, $i \in \{1, \ldots, n\}$ называется *программой преследователей,* заданной на промежутке $[0, T]$. Программа n преследователей $\{x_1, \ldots, x_n\}$, заданная на $[0, T]$, называется *выигрывающей*, если для любой траектории убегающего y, заданной на $[0, T]$, существуют $t \in [0, T]$ и $i \in \{1, \ldots, n\}$ такие, что $\rho(x_i(t), y(t)) \leq \varepsilon$, т.е. независимо от выбора траектории убегающий ловится одним из преследователей. Ставится вопрос о нахождении наименьшего натурального числа n такого, что у n преследователей существует выигрывающая программа, заданная на некотором промежутке $[0, T]$. Понятно, что эта величина зависит только от графа Γ, а также от чисел μ и ε. Будем обозначать ее через $S^{\varepsilon}_{\mu}(\Gamma)$.

Задачу поиска бывает удобно интерпретировать как задачу очистки графа от "распыленного"убегающего. Будем говорить, что для программы $\Pi = \{x_1(t), \ldots, x_n(t)\}$, $t \in [0, T]$, точка $x \in \Gamma$ является *загрязненной* в момент времени $t^* \in [0, T]$, если найдется траектория убегающего $y(t)$, $t \in [0, t^*]$, такая, что $y(t^*) = x$, и для всякого $i \in \{1, \ldots, n\}$ и $t \in [0, t^*]$ имеет место неравенство $\rho(y(t), x_i(t)) > \varepsilon$. Множество загрязненных в момент t^* точек графа Γ обозначим через $\mathcal{C}(\Pi, \Gamma, t^*)$. Множество точек $\Gamma \setminus \mathcal{C}(\Pi, \Gamma, t^*)$ называется *очищенным* в момент t^* множеством. Очевидно, что программа $\Pi = \{x_1(t), \ldots, x_n(t)\}$, $t \in [0, T]$ является выигрывающей тогда и только тогда, когда для некоторого $t^* \in [0, T]$ весь граф Γ очищен.

Случай $\mu = +\infty$ (убегающий может двигаться сколь угодно быстро) и $\varepsilon = 0$ первоначально рассматривался Парсонсом [18]. Отметим, что в этом случае наименьшее число преследователей, необходимое для существования выигрывающей программы, не зависит от длин ребер и является инвариантом, зависящим только от комбинаторной схемы графа. Случай, когда $\mu = +\infty$ и $\varepsilon \geq 0$ изучался Головачем [1], а случай $\mu \geq 0$ и $\varepsilon = 0$ – Петровым [3]. Задачи поиска Головача и Петрова являются естественным обобщением задачи Парсонса. Зависимость от длин ребер значительно усложняет решение задачи и определить величину $S^{\varepsilon}_{\mu}(\Gamma)$ можно лишь в исключительных случаях.

Одним из основополагающих фактов в изучении задачи поиска является теорема ЛаПо [14], гласящая, что в случае $\mu = +\infty$ и $\varepsilon = 0$ *the "recontamination" does not help to search a graph.*[1] К сожалению, для более общих задач поиска данный факт не верен и "стандартная"техника неприменима.

Ранее в работах [1, 2, 4, 5] авторами был получен ряд фундаментальных результатов о поиске. Основной целью данной работы является демонстрация того, как можно применять эти результаты при решении модельных задач.

В настоящей работе мы обозначаем через T, C, O графы, состоящие из всех ребер и вершин тетраэдра, куба и октаэдра, соответственно. Полный граф с n вершинами (т.е. граф, любые две вершины которого смежны) обозначается через K_n. Заметим, что графы K_4 и T изоморфны. Мы полагаем, что в графах T, C, O и K_n все ребра имеют единичную длину.

Дальнейшая часть работы имеет следующую структуру. В §2 вычисляются числа $S^{\varepsilon}_{\infty}(T)$, $S^{\varepsilon}_{\infty}(C)$, $S^{\varepsilon}_{\infty}(O)$ и $S^{\varepsilon}_{\infty}(K_n)$ для всех $\varepsilon \geq 0$. В §3 доказывается, что для всякого $n \geq 4$ $S^{0}_{\mu}(K_n) = n$ при $\mu \geq 1$. Далее находятся числа $S^{0}_{\mu}(T)$, $S^{0}_{\mu}(C)$ и $S^{0}_{\mu}(O)$ при $\mu \geq 1$ и доказывается, что $S^{0}_{\mu}(T) \leq 2$ при $\mu \leq 1/3$, $S^{0}_{\mu}(C) \leq 3$ при $\mu < 0.5$ и $S^{0}_{\mu}(C) \leq 2$ при $\mu \leq 0.2$. В заключение (§4) мы формулируем некоторые гипотезы о поисковых числах графов правильных многогранников.

2. Случай $\mu = \infty$, $\varepsilon \geq 0$

В дальнейшем мы будем использовать следующие известные факты. Первая используемая нами теорема была доказана в [2].

Теорема 1. *Если* $\deg(\Gamma) \geq 3$, *то* $S^{0}_{\infty}(\Gamma) \geq \deg(\Gamma) + 1$, *где* $\deg(\Gamma)$ – *наименьшая из степеней вершин графа* Γ.

Следующая теорема (см. [1]) дает оценку "близости"величин $S^{\varepsilon}_{\infty}(\Gamma)$ и $S^{0}_{\infty}(\Gamma)$ при малых ε.

Теорема 2. *Пусть* l *– длина наименьшего ребра графа* Γ. *Тогда*

1. $S^{\varepsilon}_{\infty}(\Gamma) = S^{0}_{\infty}(\Gamma)$ *при* $0 \leq \varepsilon < 0.25l$;
2. $S^{\varepsilon}_{\infty}(\Gamma) \geq S^{0}_{\infty}(\Gamma) - 1$ *при* $0.25l \leq \varepsilon < 0.5l$.

Мы готовы приступить к доказательству нашего первого факта об остове тетраэдра.

Теорема 3.

$$S^{\varepsilon}_{\infty}(T) = \begin{cases} 4 & \textit{при} \quad 0 \leq \varepsilon < 0.25, \\ 3 & \textit{при} \quad 0.25 \leq \varepsilon < 0.5, \\ 2 & \textit{при} \quad 0.5 \leq \varepsilon < 1.5, \\ 1 & \textit{при} \quad 1.5 \leq \varepsilon. \end{cases}$$

[1] Повторное загрязнение не помогает очистить граф

Доказательство. Заметим, что во всех случаях выигрывающая программа строится достаточно просто: четыре преследователя ловят убегающего при $\varepsilon \geq 0$, три при $\varepsilon \geq 0.25$, два при $\varepsilon \geq 0.5$ и один преследователь ловит при $\varepsilon \geq 1.5$. Поэтому при $0 \leq \varepsilon < 0.5$ утверждение теоремы является следствием теорем 1 и 2, а случай $\varepsilon \geq 0.5$ тривиален. □

Доказанная теорема является частным случаем теоремы 8, посвященной полным графам.

Для решения задач поиска для графов C и O нам понадобятся более сильные результаты.

Упорядочением вершин графа Γ будем называть взаимно-однозначное отображение

$$f: V(\Gamma) \to \{1, \ldots, |V(\Gamma)|\}.$$

Для упорядочения f графа Γ определим величины

$$\mathrm{cw}_i(\Gamma, f) = |\{(u,v) \in E(\Gamma): f(u) \leq i, f(v) > i\}|$$

и

$$\mathrm{cw}(\Gamma, f) = \max_{i \in \{1,\ldots,|V(\Gamma)|\}} \mathrm{cw}_i(\Gamma, f).$$

Шириной разреза $\mathrm{cw}(\Gamma)$ графа Γ называется наименьшее из чисел $\mathrm{cw}(\Gamma, f)$, где минимум берется по всевозможным упорядочениям f вершин графа Γ.

Мы будем ссылаться на следующую теорему о связи поискового числа и ширины разреза [16]. Напомним, что *степенью* вершины называется число смежных ей вершин.

Теорема 4. *Если степень всякой вершины графа Γ не превосходит трех, то $S^0_\infty(\Gamma) = \mathrm{cw}(\Gamma)$.*

Обозначим через $\Gamma'(v)$ подграф графа Γ, порождаемый множеством смежных v вершин, а через $n_k(\Gamma, v)$ – число компонент связности графа $\Gamma'(v)$ с ровно k вершинами.

Определим

$$c(\Gamma, v) \triangleq \sum_{k=1}^{\infty} n_k(\Gamma, v) \left\lceil \frac{k}{2} \right\rceil$$

и

$$c(\Gamma) \triangleq \min_{v \in V(\Gamma)} c(\Gamma, v).$$

Доказательство следующей теоремы приводится в [4].

Теорема 5. *Пусть l – длина наименьшего ребра в Γ и пусть $0 \leq \varepsilon < l$. Тогда*

1. $S^\varepsilon_\infty(\Gamma) \geq c(\Gamma)$;
2. *если для всякой вершины $v \in V(\Gamma)$ все коэффициенты $n_k(\Gamma, v)$ с нечетными номерами k равны 0, то $S^\varepsilon_\infty(\Gamma) \geq c(\Gamma) + 1$.*

Вычислим числа S^ε_∞ для графа куба и графа октаэдра.

Теорема 6.

$$S^{\varepsilon}_{\infty}(C) = \begin{cases} 5 & \textit{при} \;\; 0 \le \varepsilon < 0.25, \\ 4 & \textit{при} \;\; 0.25 \le \varepsilon < 0.5, \\ 3 & \textit{при} \;\; 0.5 \le \varepsilon < 1, \\ 2 & \textit{при} \;\; 1 \le \varepsilon < 3, \\ 1 & \textit{при} \;\; 3 \le \varepsilon. \end{cases}$$

Доказательство. Заметим, что во всех случаях соответствующая выигрывающая программа строится без труда.

Так как всякая вершина графа куба C имеет степень три, то по теореме 4 $\mathrm{cw}(C) = S^0_{\infty}(C)$. Упорядочение f вершин графа C такое, что $\mathrm{cw}(C, f) = 5$ приводится на рисунке (мы полагаем $f(u_i) = i$). Отметим, что для всякого упорядочения f первые три вершины "связаны"с оставшимися вершинами как минимум пятью ребрами, поэтому $\mathrm{cw}(C) \ge 5$. Нижние оценки следуют: для $0 \le \varepsilon < 0.5$ – из теоремы 2, для $0.5 \le \varepsilon < 1$ – из теоремы 5. Случай $1 \le \varepsilon < 3$ тривиален. □

Теорема 7.

$$S^{\varepsilon}_{\infty}(O) = \begin{cases} 5, & \textit{при} \;\; 0 \le \varepsilon < 0.25, \\ 4, & \textit{при} \;\; 0.25 \le \varepsilon < 0.5, \\ 3, & \textit{при} \;\; 0.5 \le \varepsilon < 1, \\ 2, & \textit{при} \;\; 1 \le \varepsilon < 2, \\ 1, & \textit{при} \;\; 2 \le \varepsilon. \end{cases}$$

Доказательство. По теореме 1 $S^0_{\infty}(O) \ge 5$. Остальные оценки доказываются как в теореме 6. □

Для полных графов наблюдается интересный эффект – "скачок"величины S^{ε}_{∞} при переходе параметром ε отметки 1/2.

Теорема 8.

$$S^{\varepsilon}_{\infty}(K_n) = \begin{cases} n & \textit{при} \;\; 0 \le \varepsilon < 0.25, \\ n-1 & \textit{при} \;\; 0.25 \le \varepsilon < 0.5, \\ \lceil n/2 \rceil & \textit{при} \;\; 0.5 \le \varepsilon < 1, \\ 2 & \textit{при} \;\; 1 \le \varepsilon < 1.5, \\ 1 & \textit{при} \;\; 1.5 \le \varepsilon. \end{cases}$$

Доказательство. Докажем, что $S^{\varepsilon}_{\infty}(K_n) = \lceil n/2 \rceil$ при $\varepsilon \in [1/2, 1)$. Во всех остальных случаях соответствующие выигрывающие программы строятся без труда, а необходимые оценки снизу для $\varepsilon \in [0, 1/2)$

легко следуют из теоремы 2. Если $n = 2l+1$, $l \in \{2,3,\dots\}$, то в силу утверждения 2 теоремы 5

$$S^{\varepsilon}_{\infty}(K_n) \geq \lceil (n-1)/2+1 \rceil = l+1 = \lceil n/2 \rceil.$$

Если же $n = 2l$, $l \in \{2,3,\dots\}$, то в силу утверждения 1 теоремы 5

$$S^{\varepsilon}_{\infty}(K_n) \geq \lceil (n-1)/2 \rceil = l = \lceil n/2 \rceil.$$

Таким образом, для любых $\varepsilon \in [1/2, 1)$ и $n > 3$ величина $S^{\varepsilon}_{\infty}(K_n) \geq \lceil n/2 \rceil$. Для того чтобы доказать противоположное неравенство, опишем выигрывающую программу для $\lceil n/2 \rceil$ преследователей. Пусть $\lceil n/2 \rceil - 1$ преследователя стоят в серединах ребер, "контролируя"$2\lceil n/2 \rceil - 2$ различных вершин. Тогда нетрудно убедиться, что одного преследователя достаточно, чтобы очистить оставшуюся часть графа K_n. □

3. Случай $\mu \geq 0$, $\varepsilon = 0$

Пусть Γ – граф, все ребра которого имеют единичную длину. Заданная на $[0, T]$ программа преследователей П называется *дискретной*, если T – натуральное число и для всякого $k \in \{1,\dots,T\}$ на протяжении $[k-1, k]$ каждый из преследователей либо стоит в вершине графа, либо переходит из вершины в смежную вершину с максимальной скоростью.

Следующее утверждение доказывается в работе [5].

Теорема 9. *Пусть Γ – граф, все ребра которого имеют единичную длину. Тогда следующие утверждения эквивалентны:*

1. *При $\mu = 1$, $\varepsilon = 0$ на Γ существует выигрывающая программа n преследователей.*

2. *При $\mu = 1$, $\varepsilon = 0$ на Γ существует дискретная выигрывающая программа n преследователей.*

Введем обозначения, необходимые для дальнейших доказательств. Пусть Γ – один из графов $\{C, T, O, K_n\}$, $n \geq 4$. Рассмотрим некоторую дискретную программу П на Γ при $\mu = 1$. Легко убедиться, что во всякий целочисленный момент времени k внутренность всякого ребра (в топологии $\mathbf{R}^3$) графа Γ либо целиком очищена, либо целиком загрязнена.

Обозначим через $p_i(v)$ число преследователей, находящихся в момент i в вершине v. Назовем вершину v *особой* в момент i, если $p_i(v)$ не меньше числа загрязненных ребер, инцидентных этой вершине. Будем обозначать через A_i множество всех особых вершин в момент i, а через a_i – его мощность. Будем говорить, что вершина v является *k-особой* в момент i, если $v \in A_i$ и $p_i(v) = k$. Назовем вершину v *голой* в момент i, если все инцидентные ей ребра в этот момент загрязнены. Будем обозначать через B_i множество всех голых вершин в момент i, а через b_i – его мощность. Пусть v – вершина степени ≥ 3 графа Γ. Тогда для всякой дискретной программы П на Γ легко доказываются следующие утверждения:

Лемма 1. *Если $v \notin A_i$ и $p_{i+1}(v) = 0$, то $v \in B_{i+1}$.*

Лемма 2. *Если $v \notin A_i$ и $v \in A_{i+1}$, то $p_{i+1}(v) \geq 2$.*

Докажем теперь основную теорему, касающуюся полных графов.

Теорема 10. *Пусть K_{n+1} – полный топологический граф с $n+1$ вершиной, все ребра которого имеют единичную длину. Тогда $S_1(K_{n+1}) = n+1$ для всех $n \geq 3$.*

Доказательство. Заметим прежде всего, что $n+1$ преследователей достаточно для поимки убегающего на K_{n+1} при любом μ. Для доказательства неравенства $S_1(K_{n+1}) \geq n+1$ покажем, что ни одна программа для n преследователей не может быть выигрывающей. Предположим противное, и пусть Π – выигрывающая программа для n преследователей. Сославшись на теорему 9, мы можем предполагать, что Π является дискретной программой.

Покажем, что при реализации Π все величины $a_j \leq 2$ и, следовательно, эта программа не может быть выигрывающей.

Рассмотрим три случая.

Случай 1. $a_j = 0$, $a_{j+1} = k \geq 1$, т.е. в момент j особых вершин не было, а в момент $j+1$ их стало k: $v_1, \ldots, v_k$.

Тогда в момент $j+1$ в неособых вершинах находятся

$$n - \sum_{i=1}^{k} p_{j+1}(v_i)$$

преследователей и существует не менее

$$l \triangleq (n+1) - k - \left(n - \sum_{i=1}^{k} p_{j+1}(v_i)\right) = \sum_{i=1}^{k} p_{j+1}(v_i) - k + 1$$

вершин, свободных от преследователей. По лемме 1 все эти вершины должны быть голыми в момент $j+1$. Так как все они смежны с каждой особой вершиной, то $p_{j+1}(v_i) \geq l$ для $i = 1, \ldots, k$ и, следовательно,

$$kl + n - \sum_{i=1}^{k} p_{j+1}(v_i) \leq n.$$

Это неравенство может быть переписано в виде

$$(1-k)\left(\sum_{i=1}^{k} p_{j+1}(v_i) - k\right) \geq 0.$$

Так как по лемме 2 $p_{j+1}(v_i) \geq 2$ для всех $i = 1, \ldots, k$, то отсюда следует, что $a_{j+1} = k = 1$. Таким образом, в случае 1 может возникнуть только одна особая вершина.

Случай 2. В момент j была одна особая вершина v_0, а в момент $j+1$ особых вершин стало $k+1$: $v_0, v_1, \dots, v_k$, $k \geq 1$, (т.е. добавилось k новых особых вершин).

Тогда в неособых вершинах в момент $j+1$ находятся

$$n - \sum_{i=0}^{k} p_{j+1}(v_i)$$

преследователей и

$$b_{j+1} \geq l \triangleq (n+1) - (k+1) - \left(n - \sum_{i=1}^{k} p_{j+1}(v_i)\right) = \sum_{i=0}^{k} p_{j+1}(v_i) - k.$$

Заметим, что в силу леммы 2 $l > 0$. Отсюда, рассуждая так же, как и в случае 1, заключаем, что во всех особых вершинах в момент $j+1$ должно находиться не менее $(k+1)l$ преследователей. Следовательно,

$$(k+1)l + n - \sum_{i=0}^{k} p_{j+1}(v_i) \leq n.$$

Это неравенство равносильно следующему

$$\sum_{i=0}^{k} p_{j+1}(v_i) \leq k+1.$$

Замечая, что в силу леммы 2 левая часть этого неравенства не меньше $p_{j+1}(v_0) + 2k$, получаем, $p_{j+1}(v_0) = 0$, что невозможно, так как $p_{j+1}(v_0) \geq l > 0$. Таким образом, случай 2 реализоваться не может.

Случай 3. В момент j была одна особая вершина u_0, а в момент $j+1$ их стало k: $v_1, \dots, v_k$, $k \geq 2$, (т.е. вершина u_0 стала неособой и добавилось k новых особых вершин). Тогда в неособых вершинах в момент $j+1$ находятся

$$n - \sum_{i=1}^{k} p_{j+1}(v_i)$$

преследователей, а незанятых вершин оказывается не менее

$$l \triangleq (n+1) - k - \left(n - \sum_{i=1}^{k} p_{j+1}(v_i)\right) = \sum_{i=1}^{k} p_{j+1}(v_i) - k + 1.$$

В силу леммы 2 $l \geq 3$. В момент $j+1$ голых вершин не менее $l-1$ (вершина u_0 может оказаться незанятой, но не голой) и, следовательно, в каждой особой вершине в момент $j+1$ не менее $l-1$ преследователей. Как и выше, получаем

$$k(l-1) + n - \sum_{i=1}^{k} p_{j+1}(v_i) \leq n,$$

или

$$(k-1)\sum_{i=1}^{k} p_{j+1}(v_i) \le k^2,$$

откуда в силу леммы 2 имеем $k = 2$. Из предыдущего неравенства следует также, что

$$p_{j+1}(v_1) + p_{j+1}(v_2) \le 4,$$

$$p_{j+1}(v_1) = p_{j+1}(v_2) = 2, \quad \text{и} \quad l = 3.$$

Ранее было отмечено, что в момент $j+1$ голых вершин не менее $l-1 = 2$. С другой стороны, их не может быть более двух, так как в этом случае в особой вершине было бы более двух преследователей. Отсюда следует, что в момент $j+1$ существуют ровно две голые вершины (обозначим их через u_1, u_2). Пусть A – множество всех вершин, отличных от u_0, v_1 и v_2. В силу леммы 1 каждая из вершин этого множества в момент $j+1$ либо занята, либо является голой. Отсюда следует, что вершины $u_1, u_2 \in A$, в них нет преследователей, а каждая из остальных вершин множества A (которые мы будем обозначать через $w_1, \ldots, w_{n-4}$) занята одним преследователем. Вершине v_1 инцидентны два загрязненных ребра (v_1, u_1) и (v_1, u_2), остальные же инцидентные ей ребра должны быть очищены. Заметим, что ребро (v_1, u_0), являющееся очищенным в момент $j+1$, в момент $j+2$ окажется загрязненным, если к этому моменту в вершину u_0 не придет преследователь из v_1. Все сказанное выше относительно v_1 справедливо и для вершины v_2. Заметим, что рассматриваемая ситуация может возникнуть лишь для $n \ge 4$.

Покажем теперь, что $a_{j+2} < 2$. Предположим сначала, что в этот момент стала особой вершина u_i $(i = 0, 1, 2)$ с m очищенными инцидентными ребрами. Если $m = 0$, то в u_i должны собраться все преследователи и, следовательно, никакая другая вершина в момент $j+2$ не может стать особой. Если $m = 1$, то очищенным ребром, инцидентным u_i, может быть лишь (u_i, v_1) или (u_i, v_2) (при переходе преследователя из вершины w_k в u_i ребро (u_i, w_k) оказывается в момент $j+2$ загрязненным). Пусть для определенности очищенным ребром является (u_i, v_1). Оно оказалось очищенным в момент $j+2$ в результате перехода одного преследователя из v_1 в u_i (при этом другой преследователь должен остаться в v_1). Чтобы вершина u_i могла стать особой в момент $j+2$, все преследователи из вершин $v_2, w_1, \ldots, w_{n-4}$ должны к этому моменту перейти в u_i. В этом случае u_i также является единственной особой вершиной в момент $j+2$. Осталось рассмотреть случай $m = 2$ (из предыдущего ясно, что $m \le 2$). В этом случае вершине u_0 в момент $j+2$ инцидентны два очищенных ребра (u_i, v_1) и (u_i, v_2). Чтобы вершина u_0 могла стать особой в момент $j+2$, в ней должны собраться $n-2$ преследователей (все, кроме двух, находящихся в вершинах v_1 и v_2). Нетрудно убедиться, что и в этой ситуации u_i – единственная особая вершина в момент $j+2$.

Предположим теперь, что в момент $j+2$ стала особой одна из вершин $w_1, \ldots, w_{n-4}$, скажем, w_1. Покажем, что и в этом случае других особых вершин в момент $j+2$ быть не может. Это утверждение очевидно, если преследователь, находящийся в момент $j+1$ в вершине w_1, покидает ее. В противном случае будем рассуждать следующим образом. Чтобы вершина w_1 стала особой в момент $j+2$, в нее необходимо перевести по крайней мере двух преследователей (“нейтрализовать"загрязненные к моменту $j+2$

ребра (w_1, u_0), (w_1, u_1) и (w_1, u_2)). При этом ясно, что преследователи, находящиеся в момент $j+1$ в вершинах $w_2, \dots, w_{n-4}$, для этой цели использованы быть не могут. Поведение же преследователей, находящихся в момент $j+1$ в вершинах v_1 и v_2, должно быть следующим: для каждого $i = 1, 2$ по крайней мере один из преследователей, находящихся в v_i, должен перейти в w_1, причем если переходит ровно один преследователь, то другой должен оставаться в v_i. Теперь становится ясным, что вершины v_1 и v_2 не могут быть особыми в момент $j+2$. То же можно сказать и о вершинах $u_0, u_1, u_2, w_2, \dots, w_{n-4}$.

Итак, если в момент $j+2$ становится особой одна из вершин u_0, u_1, u_2, $w_2, \dots, w_{n-4}$, то эта особая вершина – единственная. Таким образом, осталось рассмотреть случай, когда в момент $j+2$ могут стать особыми лишь вершины v_1 и v_2. Покажем, что на самом деле лишь одна из них может стать особой. Предположим противное, и пусть $\alpha_1, \dots, \alpha_m$, $m \geq 1$, – все незанятые вершины в момент $j+2$. Покажем, что каждая из этих вершин – голая (в момент $j+2$). Если $\alpha_i = u_0$, то это утверждение очевидно, поскольку в момент $j+1$ вершина u_0 инцидентна загрязненным ребрам (u_0, u_1) и (u_0, u_2). В противном случае вершина α_i оказывается голой в момент $j+2$ в силу леммы 1.

Таким образом, в момент $j+2$ в особых вершинах v_1, v_2 находится не менее $2m$ преследователей. Для преследователей, стоящих в этот момент в неособых вершинах, остается $(n+1)-2+m$ вершин, каждая из которых должна быть занята (иначе, незанятых вершин оказывается больше m). Отсюда следует, что

$$(n+1) - 2 - m \leq n - 2m$$

и $m = 1$.

Итак, если предположить, что особыми (в момент $j+2$) являются обе вершины v_1 и v_2, то в этот момент в каждой занятой вершине находится ровно один преследователь. Осталось выяснить, каким образом вершина v_1, особая в момент $j+1$, осталась особой в момент $j+2$. Это могло произойти лишь следующим образом: два преследователя, находящиеся в момент $j+1$ в вершине v_1, перешли в u_1 и u_2, а в вершину v_1 перешел ровно один преследователь из v_2 (чтобы в момент $j+2$ "нейтрализовать"единственное инцидентное v_1 загрязненное ребро (u_0, v_1)). Однако в этом случае нетрудно убедиться, что вершина v_2 не может быть особой в момент $j+2$. Получили противоречие.

Таким образом, доказано, что в процессе реализации программы П не может возникнуть более двух особых вершин и, следовательно, эта программа не может быть выигрывающей. □

Теорема 11.

(T1) $S^0_\mu(T) = 4 \Leftrightarrow \mu \geq 1$.

(T2) $S^0_\mu(T) \leq 2$ *при* $\mu \leq 1/3$.

Д о к а з а т е л ь с т в о.

(T1). Импликация $\Leftarrow$ является следствием теорем 10 и 3.

$\Rightarrow$: Опишем выигрывающую программу трех преследователей при $\mu < 1$. Обозначим через A, B, C, D вершины графа T и через L – цикл

(A, B, D, C, A). Преследователь P_1 движется в выбранном направлении по циклу L с постоянной максимальной (единичной) скоростью. Преследователь P_2 (P_3) движется по ребру $[A, D]$ ($[B, C]$). Действия преследователей синхронизированы следующим образом: P_1 встречается с P_2 в A и D; P_1 встречает P_3 в B и C.

Если убегающий не покидает L, то за время $4(1-\mu)^{-1}$ он будет пойман преследователем P_1. С другой стороны, учитывая действия игроков P_2 и P_3, можно убедиться, что покинув цикл L, убегающий, уклоняющийся от встречи с этими игроками, должен на L возвратиться. При этом расстояние между ним и преследователем P_1 уменьшается.

(T2). Пусть A, B, C, D – вершины T. Определим программу, в которой преследователи P_1 и P_2 движутся с максимальной скоростью по следующим маршрутам:

$$\begin{aligned}
P_1:&\quad A \to C \to D \to A \to A \to C \to D \to B \to D \to C \to A \to D \\
P_2:&\quad B \underset{1}{\to} C \underset{2}{\to} D \underset{3}{\to} B \underset{4}{\to} A \underset{5}{\to} B \underset{6}{\to} B \underset{7}{\to} B \underset{8}{\to} C \underset{9}{\to} C \underset{10}{\to} A \underset{11}{\to} B,
\end{aligned}$$

где $\xi \underset{i}{\to} \eta$ обозначает, что на протяжении $[i-1, i]$ преследователь переходит из ξ в η (или стоит, если $\xi = \eta$).

Проверка того, что указанная программа является выигрывающей при $\mu = 1/3$ проста и нами опускается. $\square$

Теорема 12. $S^0_\mu(O) = 5 \Leftrightarrow \mu \geq 1$.

Доказательство.

$\Leftarrow$: Рассмотрим произвольную дискретную программу Π четырех преследователей на графе октаэдра O. Мы докажем, что при $\mu = 1$ эта программа не является выигрывающей.

Поскольку всякая вершина октаэдра смежна всем остальным вершинам, за исключением одной, справедлива следующая лемма.

Лемма 3. *Если $b_i \geq l$, то для всякой вершины $v \in A_i$ имеет место $p_i(v) \geq l - 1$.*

Мы покажем, что в программе Π все числа $a_i \leq 2$, а потому эта программа не может быть выигрывающей.

Очевидно, что $a_0 \leq 1$. Докажем, что $a_{i-1} \leq 2$ влечет $a_i \leq 2$. Заметим, что по лемме 2 в момент i имеется не более двух особых вершин. Следовательно, если $a_{i-1} = 0$, то $a_i \leq 2$.

Предположим, что $a_{i-1} = 1$ и $a_i = 3$, т.е. одна особая вершина u_1 – старая, а две особые вершины u_2, u_3 – новые. По лемме 2 в момент i вершины u_2, u_3 являются 2-особыми, поэтому u_1 – 0-особая. Таким образом, $b_i \leq 1$. С другой стороны, согласно лемме 1 $b_i = 3$ и мы доказали, что $a_{i-1} = 1$ влечет $a_i \leq 2$.

Рассмотрим последний возможный случай $a_{i-1} = 2$. Сначала мы докажем вспомогательное утверждение.

Лемма 4. *Если для некоторого k выполняются условия $a_{k-1} < 2$ и $a_k = 2$, то $a_{k+1} < 2$.*

Доказательство леммы 4. Если $a_{k-1} = 0$, то в момент k имеются две новые 2-особые вершины. В то же время, согласно лемме 1 все остальные вершины голые. Нетрудно убедиться, что такая ситуация не может возникнуть, и для доказательства леммы достаточно рассмотреть случай $a_{k-1} = 1$. Для этого случая возможны варианты:

(I)*Из двух особых в момент k вершин одна является новой, а вторая старой.*

(II)*Обе две особые в момент k вершины являются новыми.*

Покажем, что первый вариант не может реализоваться. Предположим противное: в момент k имеется одна старая особая вершина u_1 и одна новая – u_2. Поскольку $p_k(u_2) \geq 2$ (лемма 2), то $b_k \geq 2$ (лемма 1). Из леммы 3 следует, что $p_k(u_1) \geq 1$ и, снова используя лемму 1, получаем $b_k \geq 3$. Лемма 3 влечет $p_k(u_1) \geq 2$; таким образом, $p_k(u_1) = p_k(u_2) = 2$. Но как следует из леммы 1, в возникшей ситуации все остальные вершины обязаны быть голыми, т.е. $b_k = 4$, что противоречит лемме 3.

Нами доказано, что если $a_{k-1} = 1$ и $a_k = 2$, то должны быть $u_1 \in A_{k-1} \setminus A_k$ и имеются две новые особые вершины u_2, u_3. По лемме 2 эти вершины являются 2-особыми и $b_k = 3$ (отметим, что u_1 не может быть голой). Подобная ситуация может возникнуть, только если вершины u_2 и u_3 смежны и каждая из них смежна двум голым вершинам. Поскольку u_2 и u_3 являются 2-особыми и $b_k = 3$, мы заключаем, что ребро (u_2, u_3) очищено. Более того, легко проверяется, что ребра (u_2, u_1) и (u_3, u_1) тоже очищены. Таким образом, цикл, порождаемый вершинами u_1, u_2, u_3, в момент k очищен и $p_k(u_1) = 0$, $p_k(u_2) = p_k(u_3) = 2$. Заметим, что такая ситуация осуществима. Но теперь ясно, что любые действия преследователей из данной позиции приводят к случаю $a_{k+1} < 2$ и лемма 4 доказана.
□

Из леммы 4 следует, что если $a_{i-1} = 2$, то $a_{i-2} < 2$ и $a_i < 2$. Поэтому мы заключаем, что в программе Π все числа $a_i \leq 2$ и эта программа не может быть выигрывающей.

Итак, $S^0_\mu(O) > 4$ при $\mu \geq 1$ и по теореме 7 $S^0_\mu(O) = 5$ при $\mu \geq 1$.

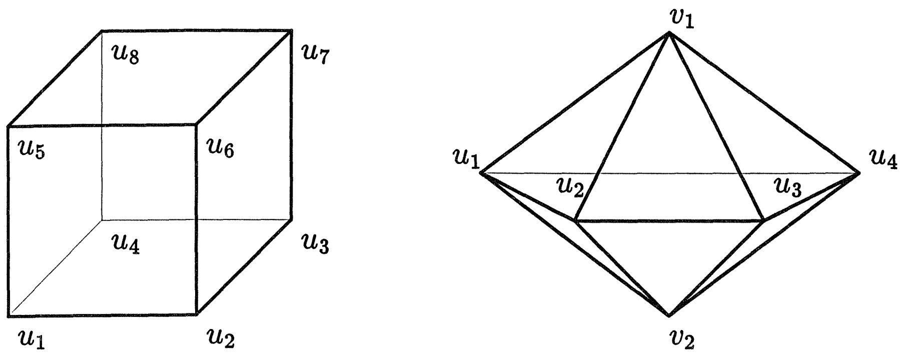
$\Rightarrow$: Опишем выигрывающую при $\mu < 1$ программу четырех преследователей. Преследователь P_i, $i \in \{1, \dots, 4\}$, движется по циклу L_i длины 3 следующим образом (см. рисунок):

$$\begin{aligned} P_1 &: \; u_2 \to v_2 \to u_1 \to u_2 \to \dots \\ P_2 &: \; u_2 \to v_1 \to u_3 \to u_2 \to \dots \\ P_3 &: \; u_4 \to v_2 \to u_3 \to u_4 \to \dots \\ P_4 &: \; u_4 \to v_1 \to u_1 \to u_4 \to \dots \quad . \end{aligned}$$

Если убегающий не покидает цикл L_i, то на протяжении $3\lceil(1-\mu)^{-1}\rceil$ он будет пойман преследователем P_i ($\mu < 1$). С другой стороны, смена циклов не помогает убегающему уклониться от поимки. В самом деле, если убегающий переходит с цикла L_i на цикл L_j в некоторый момент времени t (такой переход может произойти только в вершине октаэдра), то в момент t он “равноудален"от преследователей P_i и P_j. □

Теорема 13.

(C1) $S^0_\mu(C) = 5 \Leftrightarrow \mu \geq 1$.



Куб и октаэдр.

(C2) $S^0_\mu(C) \leq 3$ *при* $\mu < 0.5$.

(C3) $S^0_\mu(C) \leq 2$ *при* $\mu \leq 0.2$.

Доказательство.

(C1) $\Leftarrow$: Покажем, что $S^0_1(C) = 5$. Рассмотрим произвольную дискретную программу поиска четырех преследователей П и докажем, что программа П не может быть выигрывающей при $\mu = 1$.

Нетрудно убедиться в справедливости следующей леммы.

Лемма 5. *a) Если в момент i имеется одна 0-особая вершина, то $b_i \leq 4$.*

b) Если в момент i имеется две 0-особые вершины, то $b_i \leq 2$.

Для доказательства того, что программа не является выигрывающей, мы покажем, что все числа $a_i \leq 3$.

Предположим, что в начальный момент времени все преследователи находятся в одной вершине – единственной особой вершине в данный момент. Докажем, что $a_{i-1} \leq 3$ влечет $a_i \leq 3$. Отметим, что из леммы 2 следует, что в момент i не более двух особых вершин являются новыми. Поэтому если $a_{i-1} \leq 1$, то $a_i \leq 3$.

Предположим, что $a_{i-1} = 2$, но $a_i > 3$. Тогда $a_i = 4$. Более того, в момент i две особые вершины u_1, u_2 – старые и две особые вершины u_3, u_4 – новые. Поскольку u_3, u_4 являются 2-особыми в момент i, то вершины u_1, u_2 в этот же момент должны быть 0-особыми. Лемма 1 влечет $b_i \geq 4$; с другой стороны, $b_i \leq 2$ (лемма 5). Таким образом, если $a_{i-1} = 2$, то $a_i \leq 3$.

Для изучения случая $a_{i-1} = 3$ докажем еще одну лемму.

Лемма 6. *Если для некоторого $k \geq 1$ справедливо $a_{k-1} < 3$ и $a_k = 3$, то $a_{k+1} < 3$.*

Доказательство. Если $a_{k-1} = 1$, то в момент k множество особых вершин состоит их одной старой вершины u_1 и двух новых u_2, u_3. Из леммы 2 следует, что вершины u_2 и u_3 являются 2-особыми в момент k; следовательно, в этот момент u_1 является 0-особой. В силу леммы 1 $b_i \geq 5$, в то же время лемма 5 влечет $b_i \leq 4$. Поэтому $a_{k-1} = 2$.

В этом случае возможен один из вариантов:

(I) *Из трех особых в момент k вершин две старые и одна новая.*

(II) *Из трех особых в момент k вершин одна старая и две новые.*

Покажем, что вариант (I) невозможен. Предположим, что в момент k особые вершины u_1, u_2 являются старыми, а вершина u_3 новая. По лемме 2 $p_k(u_1) + p_k(u_2) \leq 2$. В этой ситуации возникает четыре случая.

a) $p_k(u_1) = p_k(u_2) = 0$. По лемме 5 $b_k \leq 2$ и лемма 1 влечет $b_k \geq 3$.

b) $p_k(u_1) = 0$, $p_k(u_2) = 2$. По лемме 1 $b_k \geq 5$, тогда по лемме 5 $b_k \leq 4$.

c) $p_k(u_1) = 0$, $p_k(u_2) = 1$. В силу лемм 1 и 5 имеем $b_k = 4$. Три вершины куба смежны вершине u_1, и u_1 не может быть голой. Следовательно, u_2 смежна u_1. Тогда вершина u_2 инцидентна двум загрязненным (в момент k) ребрам и не может быть особой.

d) $p_k(u_1) = p_k(u_2) = 1$, $p_k(u_3) = 2$. В этом случае $b_k = 5$. В момент k вершина u_1 смежна как минимум двум очищенным ребрам, концы которых не принадлежат B_k. А потому u_1 смежна u_2 и u_3. По той же причине u_2 смежна u_1 и u_3. Тогда вершины u_1, u_2, u_3 порождают цикл длины три в C, что невозможно.

Мы доказали, что если $a_{k-1} = 2$ и $a_k = 3$, то возможен только вариант (II), т.е. существуют вершины $u_0 \in A_{k-1} \setminus A_k$, $u_1 \in A_{k-1} \cap A_k$ и две новых вершины $u_2, u_3 \in A_k \setminus A_{k-1}$. По лемме 1 все вершины, за исключением u_0,u_1,u_2 и u_3 являются голыми в момент k, а потому $b_k = 4$. Также вершины u_0,u_2,u_3 смежны u_1. Отметим, что такая ситуация возможна.

Теперь ясно, что всякие действия преследователей в данной позиции приводят к случаю $a_{k+1} < 3$ и лемма 6 доказана. □

Из леммы 6 следует, что если $a_{i-1} = 3$, то $a_{i-2} < 3$ и $a_i < 3$. Таким образом, для программы П все числа $a_i \leq 3$ и П не может быть выигрывающей.

Итак, $S^0_\mu(C) > 4$ при $\mu \geq 1$ и по теореме 6 $S^0_\mu(C) = 5$ при $\mu \geq 1$.

$\Rightarrow$: Предъявим выигрывающую при $\mu < 1$ программу четырех преследователей. Каждый из преследователей P_i, $i \in \{1, \dots, 4\}$, движется по циклу L_i длины четыре согласно следующей схеме (см. рисунок):

$$\begin{aligned}
P_1 &: \quad u_1 \to u_5 \to u_6 \to u_2 \to u_1 \to \dots \\
P_2 &: \quad u_1 \to u_5 \to u_8 \to u_4 \to u_1 \to \dots \\
P_3 &: \quad u_3 \to u_7 \to u_6 \to u_2 \to u_3 \to \dots \\
P_4 &: \quad u_3 \to u_7 \to u_8 \to u_4 \to u_3 \to \dots
\end{aligned}$$

Как и в теореме 12, нетрудно убедиться в том, что за время $4\lceil(1-\mu)^{-1}\rceil$ убегающий будет пойман.

(C2) Обозначим через u_i, $i \in \{1, \dots, 8\}$, вершины графа C (см. рисунок). Определим маршруты преследователей:

$$\begin{aligned}
P_1 &: \quad u_1 \to u_2 \to u_2 \to u_3 \to u_3 \to u_4 \to u_4 \to u_1 \to u_1, \\
P_2 &: \quad u_5 \to u_6 \to u_6 \to u_7 \to u_7 \to u_8 \to u_8 \to u_5 \to u_5, \\
P_3 &: \quad u_1 \to u_2 \to u_6 \to u_7 \to u_3 \to u_4 \to u_8 \to u_5 \to u_1.
\end{aligned}$$

Каждый из преследователей проходит по указанному маршруту $\lceil (1-2\mu)^{-1} \rceil$ раз. Легко доказывается, что при $\mu < 0.5$ данная программа будет выигрывающей. В самом деле, преследователи P_1 и P_2 вынуждают убегающего покинуть ребра циклов u_1, u_2, u_3, u_4, u_1 и u_5, u_6, u_7, u_7, u_5. Но тогда убегающий ловится игроком P_3.

(C3) Обозначим через u_i, $i \in \{1, \ldots, 8\}$, вершины графа C (см. рисунок). Определим траектории игроков:

$$\begin{array}{ll}
P_1: & u_6 \to u_7 \to u_8 \to u_5 \to u_6 \to u_6 \to u_6 \to u_2 \to u_3 \to u_7 \to u_3 \to u_2 \to u_6 \\
P_2: & u_3 \underset{1}{\to} u_7 \underset{2}{\to} u_8 \underset{3}{\to} u_4 \underset{4}{\to} u_3 \underset{5}{\to} u_7 \underset{6}{\to} u_6 \underset{7}{\to} u_5 \underset{8}{\to} u_8 \underset{9}{\to} u_4 \underset{10}{\to} u_3 \underset{11}{\to} u_4 \underset{12}{\to} u_8 \\
P_1: & u_6 \to u_5 \to u_1 \to u_2 \to u_6 \to u_2 \to u_3 \to u_7 \to u_8 \to u_4 \to u_1 \to u_2 \to u_6 \\
P_2: & u_8 \underset{13}{\to} u_5 \underset{14}{\to} u_1 \underset{15}{\to} u_4 \underset{16}{\to} u_8 \underset{17}{\to} u_4 \underset{18}{\to} u_3 \underset{19}{\to} u_2 \underset{20}{\to} u_1 \underset{21}{\to} u_4 \underset{22}{\to} u_3 \underset{23}{\to} u_2 \underset{24}{\to} u_6.
\end{array}$$

Доказательство того, что при $\mu = 0.2$ программа является выигрывающей, просто и оставляется читателю. □

4. Заключение

В §2 мы вычислили все числа S_∞^ε одномерных остовов тетраэдра, октаэдра и куба. В настоящий момент нам неизвестно решение задачи в случае икосаэдра и додекаэдра. Мы формулируем следующие предположения о поисковых числах икосаэдра и додекаэдра.

Гипотеза 1. *Пусть $I(D)$ есть одномерный остов икосаэдра (додекаэдра). Тогда*

$$S_\infty^\varepsilon(I) = \begin{cases} 7, & \text{при } 0 \le \varepsilon < 0.25, \\ 6, & \text{при } 0.25 \le \varepsilon < 0.5, \\ 4, & \text{при } 0.5 \le \varepsilon < 1, \\ 3, & \text{при } 1 \le \varepsilon < 1.25, \\ 2, & \text{при } 1.25 \le \varepsilon < 3, \\ 1, & \text{при } 3 \le \varepsilon. \end{cases} \qquad S_\infty^\varepsilon(D) = \begin{cases} 7, & \text{при } 0 \le \varepsilon < 0.25, \\ 6, & \text{при } 0.25 \le \varepsilon < 0.5, \\ 4, & \text{при } 0.5 \le \varepsilon < 1.5, \\ 3, & \text{при } 1.5 \le \varepsilon < 2.25, \\ 2, & \text{при } 2.25 \le \varepsilon < 5, \\ 1, & \text{при } 5 \le \varepsilon. \end{cases}$$

В § 3 мы доказали, что $S_\mu^0(T) = 4$ и $S_\mu^0(C) = 5$ тогда и только тогда, когда $\mu \ge 1$. Для тетраэдра была построена выигрывающая при $\mu \le 1/3$ программа двух преследователей. Для куба были вычислены оценки $S_\mu^0(C) = 2$ при $\mu \le 0.2$ и $S_\mu^0(C) \le 3$ при $\mu < 0.5$. Мы полагаем, что найденные нами оценки являются точными:

Гипотеза 2.

$$S_\mu^0(T) = \begin{cases} 4, & \text{при } \mu \ge 1, \\ 3, & \text{при } 1/3 < \mu < 1, \\ 2, & \text{при } 0 < \mu \le 1/3, \\ 1, & \text{при } \mu = 0. \end{cases} \qquad S_\mu^0(C) = \begin{cases} 5, & \text{при } \mu \ge 1, \\ 4, & \text{при } 0.5 \le \mu < 1, \\ 3, & \text{при } 0.2 < \mu < 0.5, \\ 2, & \text{при } 0 < \mu \le 0.2, \\ 1, & \text{при } \mu = 0. \end{cases}$$

Интересной задачей нам представляется и нахождение чисел S^0_μ полных графов.

Аспирантом кафедры исследования операций СПбГУ С.В. Лунеговым написана компьютерная программа, позволяющая находить выигрывающие программы поиска для некоторых графов. С ее помощью была найдена выигрывающая при $\mu = 0.25$ программа поиска двух преследователей на графе октаэдра, состоящая из 38 шагов. Нахождение подобных программ поиска без помощи компьютера представляется нам маловероятным, но проверка того, что найденная компьютером программа является выигрывающей, вполне осуществима "вручную"(при некотором запасе терпения).

Поступила 25.06.99

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

[1] **Головач П.А.** Об одной экстремальной задаче поиска на графах // Вестн. Ленингр. ун-та. Сер. 1. 1990. Вып. 3. С. 16–21.

[2] **Головач П.А., Петров Н.Н.** Поисковое число полного графа // Вестн. Ленингр. ун-та. Сер. 1. 1986. Вып. 4. С. 15–19.

[3] **Петров Н.Н.**, Некоторые экстремальные задачи поиска на графах // Дифференц. уравнения. 1982. Т. 18, №5. С. 821–827.

[4] **Петров Н.Н.**, Преследование невидимого подвижного объекта // Дифференц. уравнения. 1996. Т. 32, №11. С. 1–3.

[5] **Фомин Ф.В.**, Задачи преследования и поиска на графах: Канд. дисс. СПб., 1997.

[6] **Bienstock D.**, Graph searching, path-width, tree-width and related problems (a survey) // DIMACS Ser. Discrete Math and Theor, Comput. Sci. 1991. Vol. 5. P. 33–49.

[7] **Bienstock D., Robertson N., Seymour P.D., Thomas R.**, Quickly excluding a forest // J. Combin. Theory. Ser. B, 1991. Vol. 52. P. 274–283.

[8] **Dendris N.D., Kirousis L.M., Thilikos D.M.** , Fugitive-search games on graphs and related parameters // Theor. Comput. Sci. 1997. Vol. 172. P. 233–254.

[9] **Ellis J.A., Sudborough I.H., Turner J.**, The vertex separation and search number of a graph // Inform. and Comput. 1994. Vol. 113. P. 50–79.

[10] **Fomin F.V. Petrov N.N.** , Pursuit-evasion and search problems on graphs // Congr. Numer. 1996. Vol. 122. P. 47–58.

[11] **Fomin F.V., Golovach P.A., Petrov N.N.**, Search problems on 1-skeletons of regular polyhedrons //Games Theory and Appl. Vol. III. N.Y.: Nova Science Publisher, 1997. P. 27–37.

[12] **Franklin M., Galil Z. Yung M.**, Eavesdropping games: A graph-theoretic approach to privacy in distributed systems // 34th Ann. Sympos. on Foundations of Computer Sci., Palo Alto, California, 3–5 Nov. 1993, IEEE. P. 670–679.

[13] **Kirousis L.M. Papadimitriou C.H.** , Searching and pebbling // Theor. Comput. Sci. 1986. Vol. 47. P. 205–218.

[14] **LaPaugh A.S.** , Recontamination does not help to search a graph // J. ACM. 1993. Vol. 40. P. 224–245.

[15] **Makedon F.S., Papadimitriou C.H., Sudborough I.H.** , Topological bandwidth // SIAM J. Algebraic Disc. Meth., 1985. Vol. 6. P. 418–444.

[16] **Makedon F.S. Sudborough I.H.** , On minimizing width in linear layouts // Discrete Appl. Math., 1989. Vol. 23. P. 201–298.

[17] **Möhring R.H.**, Graph problems related to gate matrix layout and PLA folding // Computational Graph Theory, Comuting Suppl. 7, Berlin: Springer Verlag, 1990. P. 17–51.

[18] **Parsons T.D.** , Pursuit-evasion in a graph, in Theory and Application of Graphs, Y. Alavi and D. R. Lick, eds., Berlin, 1976, Springer Verlag, pp. 426–441.

[19] **Sugihara K. Suzuki I.**, Optimal algorithms for a pursuit-evasion problem in grids // SIAM J. Discrete Methods, 1989. Vol. 2. P. 126–143.